

Tích của một vectơ với một số

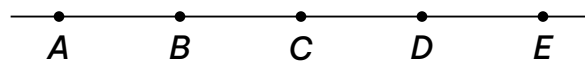
Họ và tên: _____

Ngày: _____

DẠNG 1. Tìm số k , tính độ dài và hướng của $k\vec{a}$

Gợi ý: cùng hướng thì $k > 0$, ngược hướng thì $k < 0$; $|k|$ bằng độ dài vectơ này chia độ dài vectơ kia.

Bài 1. Năm điểm A, B, C, D, E nằm trên một đường thẳng theo thứ tự đó và cách đều nhau ($AB = BC = CD = DE$). Điền số thích hợp vào ô trống.



a) $\vec{AE} = \boxed{} \vec{AB}$

b) $\vec{CA} = \boxed{} \vec{AB}$

c) $\vec{BE} = \boxed{} \vec{DA}$

d) $\vec{AC} = \boxed{} \vec{EB}$

Bài 2. Cho vectơ $\vec{a}$ có độ dài bằng 6.

a) Tính độ dài của vectơ $\frac{2}{3}\vec{a}$ và cho biết nó cùng hướng hay ngược hướng với $\vec{a}$.

.....

b) Tính độ dài của vectơ $-\frac{5}{2}\vec{a}$ và cho biết nó cùng hướng hay ngược hướng với $\vec{a}$.

.....

c) Bạn An viết: $|-4\vec{a}| = -4 \cdot 6 = -24$. An sai ở đâu? Viết lại cho đúng.

.....

DẠNG 2. Rút gọn và chứng minh đẳng thức vectơ

Gợi ý: phá ngoặc, gom nhóm như biểu thức đại số; gom từng cặp vectơ để dùng hệ thức trung điểm.

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau.

a) $2(3\vec{a} - \vec{b}) - 3(\vec{a} - 2\vec{b})$

.....
.....

b) $\frac{1}{2}(4\vec{a} + 6\vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b})$

.....
.....

Bài 4. Cho hình bình hành $PQRS$ có tâm O và một điểm T tùy ý. Chứng minh rằng $\vec{TP} + \vec{TQ} + \vec{TR} + \vec{TS} = 4\vec{TO}$.

.....
.....
.....
.....

DẠNG 3. Biểu thị một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

Gợi ý: chèn điểm để đi vòng qua cạnh đã biết; đoạn bị chia thì đổi thành (tỉ số) nhân cả cạnh; đưa hết về hai vectơ gốc.

Bài 5. Cho tam giác MNP . Điểm K nằm trên cạnh NP sao cho $NK = \frac{2}{5}NP$.

a) Biểu thị $\vec{MK}$ theo $\vec{MN}$ và $\vec{MP}$.

.....
.....
.....

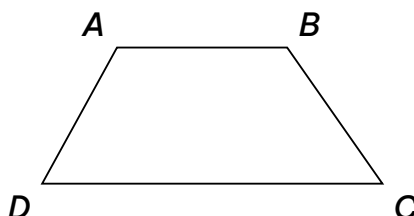
b) Gọi G là trọng tâm tam giác MNP . Biểu thị $\overrightarrow{MG}$ theo $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

.....

.....

.....

Bài 6. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB và CD , với $CD = 2AB$ (hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng).



a) Biểu thị $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

.....

.....

.....

b) Biểu thị $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

.....

.....

.....

DẠNG 4. Ba điểm thẳng hàng và bài toán thực tế

Gợi ý: chọn hai vectơ chung điểm đầu rồi chỉ ra vectơ này bằng một số nhân với vectơ kia.

Bài 7. Cho tam giác ABC .

a) Điểm Q thỏa mãn $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm B, Q, C thẳng hàng và cho biết Q nằm ở đâu trên đường thẳng BC .

.....

.....

.....

.....

- b) Điểm R thỏa mãn $\overrightarrow{AR} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm R, B, C thẳng hàng. Điểm R có nằm trên đoạn BC không?

.....

.....

.....

.....

Bài 8. Trên màn hình điện thoại, bạn phóng to một tấm ảnh lên 250% quanh tâm phóng O : mỗi điểm A của ảnh chuyển tới điểm A' với $\overrightarrow{OA'} = 2,5\overrightarrow{OA}$. Ban đầu điểm A cách O là 3 cm.

- a) Sau khi phóng to, điểm A' cách O bao nhiêu xăng-ti-mét?

.....

.....

- b) Tìm số k để $\overrightarrow{AA'} = k\overrightarrow{OA}$. Điểm A đã dịch đi bao nhiêu xăng-ti-mét, theo hướng nào?

.....

.....

.....

- c) Trên ảnh có thêm điểm B , với $AB = 4$ cm. Chứng minh $\overrightarrow{A'B'} = 2,5\overrightarrow{AB}$, rồi tính $A'B'$.

.....

.....

.....

.....

Tích của một vectơ với một số

DẠNG 1. Tìm số k , tính độ dài và hướng của $k\vec{a}$

Cách làm. Vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng nếu $k < 0$, và $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$.
Muốn tìm k trong $\vec{u} = k\vec{v}$: xét hướng để lấy dấu, rồi lấy $|k| = |\vec{u}| : |\vec{v}|$.

Bài 1.

a) Cùng hướng, $AE = 4AB$. Đáp án: $\vec{AE} = 4\vec{AB}$

b) Ngược hướng, $CA = 2AB$. Đáp án: $\vec{CA} = -2\vec{AB}$

c) Ngược hướng, $BE = DA$ (cùng bằng 3 khoảng). Đáp án: $\vec{BE} = -1\vec{DA}$

d) Ngược hướng, AC dài 2 khoảng, EB dài 3 khoảng. Đáp án: $\vec{AC} = -\frac{2}{3}\vec{EB}$

Bài 2.

a) $\left|\frac{2}{3}\vec{a}\right| = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$. Vì $\frac{2}{3} > 0$ nên vectơ này cùng hướng với $\vec{a}$. Đáp án: **Dài 4, cùng hướng**

b) $\left|-\frac{5}{2}\vec{a}\right| = \frac{5}{2} \cdot 6 = 15$. Vì $-\frac{5}{2} < 0$ nên vectơ này ngược hướng với $\vec{a}$. Đáp án:
Dài 15, ngược hướng

c) Độ dài của một vectơ không bao giờ âm. Phải nhân với trị tuyệt đối của số:
 $|-4\vec{a}| = |-4| \cdot |\vec{a}| = 4 \cdot 6 = 24$. Dấu trừ chỉ làm vectơ đổi hướng. Đáp án:
 $|-4\vec{a}| = 24$

DẠNG 2. Rút gọn và chứng minh đẳng thức vectơ

Cách làm. $k(\vec{a} \pm \vec{b}) = k\vec{a} \pm k\vec{b}$; $(k+t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$; $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$. Nếu I là trung điểm của AB thì với mọi điểm M : $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$. Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì với mọi điểm M : $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$.

Bài 3.

a) $= 6\vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{a} + 6\vec{b} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$. Đáp án: $3\vec{a} + 4\vec{b}$

b) $= 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + 4\vec{b}$. Đáp án: $\vec{a} + 4\vec{b}$

Bài 4. O là trung điểm của đường chéo PR nên $\vec{TP} + \vec{TR} = 2\vec{TO}$. O cũng là trung

điểm của đường chéo QS nên $\overrightarrow{TQ} + \overrightarrow{TS} = 2\overrightarrow{TO}$. Cộng hai đẳng thức: vế trái bằng $2\overrightarrow{TO} + 2\overrightarrow{TO} = 4\overrightarrow{TO}$.

Đáp án: **Đã chứng minh (dùng hệ thức trung điểm hai lần)**

DẠNG 3. Biểu thị một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

Cách làm. Quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$; quy tắc hiệu: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Điểm D nằm trên đoạn BC với $BD = t \cdot BC$ thì $\overrightarrow{BD} = t\overrightarrow{BC}$. Kiểm tra nhanh: nếu D nằm trên đường thẳng BC và $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ thì $x + y = 1$.

Bài 5.

a) $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NK} = \overrightarrow{MN} + \frac{2}{5}\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MN} + \frac{2}{5}(\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}) = \frac{3}{5}\overrightarrow{MN} + \frac{2}{5}\overrightarrow{MP}$. (Kiểm tra: $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$.)

Đáp án: $\overrightarrow{MK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{MN} + \frac{2}{5}\overrightarrow{MP}$

b) Gọi I là trung điểm của NP thì $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MI}$. Trọng tâm nằm trên trung tuyến MI và $MG = \frac{2}{3}MI$ nên $\overrightarrow{MG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MI} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{MN} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MP}$. Đáp án:

$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MN} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MP}$

Bài 6.

a) $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng $\overrightarrow{AB}$ và dài gấp đôi nên $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$. Vậy $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Đáp án: $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Đáp án: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

DẠNG 4. Ba điểm thẳng hàng và bài toán thực tế

Cách làm. Ba điểm phân biệt M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi có số k để $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{MP}$. Phóng to (thu nhỏ) hình với tâm O, tỉ số k: mỗi điểm A biến thành điểm A' với $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$.

Bài 7.

a) $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Hai vectơ $\overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng phương, chung điểm B nên B, Q, C thẳng hàng. Vì $\frac{2}{3} > 0$ nên Q nằm trên đoạn BC, với $BQ = \frac{2}{3}BC$. Đáp án: $\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB} = -2\overrightarrow{BC}$. Hai vectơ cùng phương, chung điểm B nên R, B, C thẳng hàng. Vì $-2 < 0$ nên $\overrightarrow{BR}$ ngược hướng $\overrightarrow{BC}$: R nằm trên tia đối của tia BC (ngoài đoạn BC), với $BR = 2BC$. Đáp án: $\overrightarrow{BR} = -2\overrightarrow{BC}$, R ngoài đoạn BC

Bài 8.

a) $OA' = |2,5| \cdot OA = 2,5 \cdot 3 = 7,5 \text{ (cm)}$. Đáp án: **7,5 cm**

b) $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA} = 2,5 \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} = 1,5 \overrightarrow{OA}$. Vậy $k = 1,5$: điểm A dịch $1,5 \cdot 3 = 4,5 \text{ cm}$, cùng hướng với $\overrightarrow{OA}$ (ra xa tâm). Đáp án: **$k = 1,5$; dịch 4,5 cm**

c) $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = 2,5 \overrightarrow{OB} - 2,5 \overrightarrow{OA} = 2,5 (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 2,5 \overrightarrow{AB}$. Vậy đoạn $A'B'$ cùng phương với đoạn AB và $A'B' = 2,5 \cdot 4 = 10 \text{ (cm)}$: ảnh to ra nhưng không bị méo.
Đáp án: **$A'B' = 10 \text{ cm}$**