

Công thức lượng giác

Họ và tên: _____

Ngày: _____

DẠNG 1. Tính giá trị lượng giác bằng công thức cộng

Gợi ý: tách góc thành tổng hoặc hiệu hai góc quen thuộc; thiếu sin hay cos thì tìm trước và xét dấu theo góc phần tư.

Bài 1. Không dùng máy tính, hãy tính.

a) $\cos 105^\circ$

.....

.....

.....

b) $\tan 105^\circ$

.....

.....

.....

.....

c) $\sin 80^\circ \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \sin 20^\circ$

.....

.....

Bài 2. Cho $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$ với $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$.

.....

.....

.....

.....

.....

DẠNG 2. Dùng công thức nhân đôi, hạ bậc

Gợi ý: cần đủ $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ (chú ý dấu); để cho $\sin \alpha \pm \cos \alpha$ thì bình phương hai vế.

Bài 3. Cho $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ với $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ và $\tan 2\alpha$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 4. Tính.

a) $\sin 2\alpha$, biết $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{3}{4}$.

.....

.....

.....

b) $\sin^2 15^\circ$ (dùng công thức hạ bậc).

.....

.....

.....

DẠNG 3. Đổi qua lại giữa tích và tổng

Gợi ý: thấy tích thì đổi thành tổng, thấy tổng thì đổi thành tích, sao cho xuất hiện góc đặc biệt.

Bài 5. Không dùng máy tính, hãy tính.

a) $\cos 82,5^\circ \cdot \cos 37,5^\circ$

.....

.....

.....

b) $\sin 105^\circ - \sin 15^\circ$

.....

.....

.....

c) $\cos 10^\circ + \cos 110^\circ + \cos 130^\circ$

.....

.....

.....

.....

DẠNG 4. Bài toán thực tế

Gợi ý: nhận ra mẫu công thức trong biểu thức, viết gọn lại rồi mới tính.

Bài 6. Hai ống sáo cùng thổi một nốt nhưng lệch nhau một chút. Âm nghe được có dạng $y = \sin(2\pi \cdot 300 t) + \sin(2\pi \cdot 306 t)$, với t tính bằng giây.

a) Viết y thành tích của một hàm sin và một hàm cosin.

.....

.....

.....

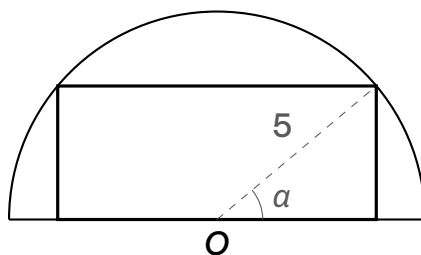
b) Tai nghe thấy một nốt bao nhiêu héc, to nhỏ nhấp nhô mấy lần mỗi giây?

.....

.....

.....

Bài 7. Một ô cửa hình chữ nhật nằm trong nửa hình tròn bán kính 5 m, một cạnh nằm trên đường kính. Gọi α là góc giữa đường kính và bán kính đi tới một đỉnh phía trên ($0 < \alpha < 90^\circ$). Khi đó ô cửa rộng $10 \cos \alpha$ (m) và cao $5 \sin \alpha$ (m).



a) Viết gọn công thức diện tích S của ô cửa theo α .

.....

.....

.....

b) Góc α bằng bao nhiêu thì ô cửa rộng nhất? Diện tích khi đó là bao nhiêu?

.....

.....

.....

Công thức lượng giác

DẠNG 1. Tính giá trị lượng giác bằng công thức cộng

Cách làm. $\cos(a \mp b) = \cos a \cos b \pm \sin a \sin b$ (đổi dấu); $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$ (giữ dấu); $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$.

Bài 1.

a) $\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$. Đáp án: $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

b) $\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}$. Đáp án: $-2 - \sqrt{3}$

c) Đây là vế phải của $\sin(a - b)$ với $a = 80^\circ$, $b = 20^\circ$: bằng $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Đáp án: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 2. $\sin^2 \alpha = 1 - \frac{64}{289} = \frac{225}{289}$. Góc phần tư thứ ba nên $\sin \alpha < 0$: $\sin \alpha = -\frac{15}{17}$.
 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \alpha \cdot \frac{1}{2} + \sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{8}{34} - \frac{15\sqrt{3}}{34} = -\frac{8 + 15\sqrt{3}}{34}$.
 Đáp án: $-\frac{8 + 15\sqrt{3}}{34}$

DẠNG 2. Dùng công thức nhân đôi, hạ bậc

Cách làm. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$;
 $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$. Hạ bậc: $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.

Bài 3. $\sin^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$. Góc phần tư thứ tư nên $\sin \alpha < 0$: $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$. $\sin 2\alpha = 2 \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) \cdot \frac{5}{13} = -\frac{120}{169}$; $\cos 2\alpha = \frac{25}{169} - \frac{144}{169} = -\frac{119}{169}$; $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{120}{119}$.
 Đáp án: $\sin 2\alpha = -\frac{120}{169}$; $\cos 2\alpha = -\frac{119}{169}$; $\tan 2\alpha = \frac{120}{119}$

Bài 4.

a) Bình phương hai vế: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{9}{16}$, tức $1 + \sin 2\alpha = \frac{9}{16}$. Vậy

$$\sin 2\alpha = -\frac{7}{16}. \quad \text{Đáp án: } \boxed{-\frac{7}{16}}$$

b) $\sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$. Đáp án: $\boxed{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$

DẠNG 3. Đổi qua lại giữa tích và tổng

Cách làm. $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$; $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$;
 $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a - b) + \sin(a + b)]$. $\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$; $\cos u - \cos v =$
 $-2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$; $\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$; $\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$.

Bài 5.

a) Hiệu 45° , tổng 120° : $\frac{1}{2}[\cos 45^\circ + \cos 120^\circ] = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{4}$. Đáp án:

$$\boxed{\frac{\sqrt{2} - 1}{4}}$$

b) Nửa tổng 60° , nửa hiệu 45° : $2 \cos 60^\circ \sin 45^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Đáp án: $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

c) Gộp hai số hạng đầu: $\cos 10^\circ + \cos 110^\circ = 2 \cos 60^\circ \cos 50^\circ = \cos 50^\circ$. Mà $\cos 130^\circ = -\cos 50^\circ$. Tổng bằng $\cos 50^\circ - \cos 50^\circ = 0$. Đáp án: $\boxed{0}$

DẠNG 4. Bài toán thực tế**Bài 6.**

a) Nửa tổng: $2\pi \cdot 303 t$; nửa hiệu: $-2\pi \cdot 3 t$, mà $\cos(-x) = \cos x$. Vậy $y = 2 \sin(2\pi \cdot 303 t) \cos(2\pi \cdot 3 t)$. Đáp án: $\boxed{y = 2 \sin(2\pi \cdot 303 t) \cos(2\pi \cdot 3 t)}$

b) Thừa số $\sin(2\pi \cdot 303 t)$ là nốt 303 Hz. Độ to đi theo $|\cos(2\pi \cdot 3 t)|$, mỗi giây đạt đỉnh $2 \cdot 3 = 6$ lần, đúng bằng hiệu hai tần số 306–300. Đáp án: $\boxed{303 \text{ Hz; } 6 \text{ lần/giây}}$

Bài 7.

a) $S = 10 \cos \alpha \cdot 5 \sin \alpha = 50 \sin \alpha \cos \alpha = 25 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha = 25 \sin 2\alpha \text{ (m}^2\text{)}$. Đáp án:

$$\boxed{S = 25 \sin 2\alpha \text{ (m}^2\text{)}}$$

b) $\sin 2\alpha \leq 1$, dấu bằng khi $2\alpha = 90^\circ$, tức $\alpha = 45^\circ$. Khi đó $S = 25 \text{ m}^2$. Đáp án:

$$\alpha = 45^\circ; S = 25 \text{ m}^2$$