

Hai mặt phẳng song song

Họ và tên: _____

Ngày: _____

DẠNG 1. Chứng minh hai mặt phẳng song song

Gợi ý: trong mặt phẳng thứ nhất tìm HAI đường thẳng cắt nhau, mỗi đường song song với một đường nằm trong mặt phẳng thứ hai. Nhớ vẽ hình (cạnh khuất vẽ nét đứt).

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$ và $AB = 2CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, AB .

a) Chứng minh $(MND) \parallel (SBC)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b) Mặt phẳng (SCD) cắt hai mặt phẳng (SBC) và (MND) theo hai giao tuyến nào? Hai giao tuyến đó có vị trí như thế nào với nhau?

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB . Chứng minh $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DẠNG 2. Tìm giao tuyến và thiết diện

Gợi ý: một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song theo hai giao tuyến song song. Biết giao tuyến với mặt này thì kẻ đường song song trên mặt kia.

Bài 3. Cho hình hộp $ABCD.MNPQ$ (các cạnh bên AM, BN, CP, DQ). Gọi I là trung điểm của cạnh AB .

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (CPI) với mặt phẳng $(MNPQ)$.

.....

.....

.....

.....

.....

b) Thiết diện của hình hộp cắt bởi (CPI) là hình gì?

.....

.....

.....

.....

Bài 4. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M thuộc cạnh AB sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với (BCD) , cắt AC, AD lần lượt tại N, P .

a) Chứng minh $MN \parallel BC$.

.....

.....

.....

b) Biết chu vi tam giác BCD bằng 27 cm. Tính chu vi tam giác MNP .

.....

.....

.....

.....

DẠNG 3. Định lí Thalès trong không gian

Gợi ý: xác định ba mặt phẳng đôi một song song và hai cát tuyến; các đoạn bị chắn trên hai cát tuyến tỉ lệ với nhau.

Bài 5. Ba mặt phẳng đôi một song song cắt đường thẳng d lần lượt tại A, B, C và cắt đường thẳng d' lần lượt tại D, E, F .

a) Biết $AB = 4, BC = 10, DF = 21$. Tính DE và EF .

.....

.....

.....

b) Biết $AB = 5, AC = 12, EF = 10,5$. Tính BC và DE .

.....

.....

.....

Bài 6. Một nhà để xe có ba mặt sàn song song. Một cây cột thẳng đứng cắt ba mặt sàn lần lượt tại A, B, C với $AB = 3,2$ m và $BC = 4$ m. Một ống thoát nước thẳng, đặt xiên, cắt ba mặt sàn lần lượt tại D, E, F . Người ta đo được $DE = 8$ m. Tính độ dài đoạn ống EF và cả đoạn ống DF .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Hai mặt phẳng song song

DẠNG 1. Chứng minh hai mặt phẳng song song

Cách làm. Bước 1: chọn hai đường thẳng cắt nhau a, b trong mặt phẳng (P) . Bước 2: chỉ ra $a \parallel a', b \parallel b'$ với a', b' nằm trong (Q) (dùng đường trung bình, hình bình hành, định lý Thalès đảo...), suy ra $a \parallel (Q), b \parallel (Q)$. Bước 3: kết luận $(P) \parallel (Q)$. Một cặp đường song song thì chưa đủ.

Bài 1.

- a) MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN \parallel SB$, suy ra $MN \parallel (SBC)$. Vì $NB = \frac{1}{2}AB = CD$ và $NB \parallel CD$ nên $NBCD$ là hình bình hành: $ND \parallel BC$, suy ra $ND \parallel (SBC)$. Hai đường MN, ND cắt nhau tại N và cùng song song với (SBC) . Đáp án: $(MND) \parallel (SBC)$
- b) (SCD) cắt (SBC) theo SC . Điểm D thuộc cả (SCD) và (MND) nên (SCD) cắt (MND) theo một đường thẳng d đi qua D . Vì $(MND) \parallel (SBC)$ nên hai giao tuyến song song: $d \parallel SC$. Đáp án: SC và đường thẳng d qua D ; $d \parallel SC$

Bài 2. Gọi I, J, K là trung điểm của BC, CD, DB . Vì G_1, G_2 là trọng tâm nên $\frac{AG_1}{AI} = \frac{AG_2}{AJ} = \frac{2}{3}$. Theo định lý Thalès đảo trong tam giác AIJ : $G_1G_2 \parallel IJ$, mà $IJ \subset (BCD)$ nên $G_1G_2 \parallel (BCD)$. Tương tự $G_2G_3 \parallel JK$ nên $G_2G_3 \parallel (BCD)$. Hai đường G_1G_2, G_2G_3 cắt nhau tại G_2 . Đáp án: $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$

DẠNG 2. Tìm giao tuyến và thiết diện

Cách làm. Bước 1: tìm giao tuyến của mặt phẳng cắt với một trong hai mặt phẳng song song (thường là một đáy). Bước 2: trên mặt phẳng kia, qua điểm chung đã biết, kẻ đường thẳng song song với giao tuyến vừa tìm. Bước 3: nối các giao điểm trên từng mặt để được thiết diện, rồi nhận dạng (hình thang, hình bình hành...).

Bài 3.

- a) (CPI) cắt đáy $(ABCD)$ theo đường thẳng CI . Vì $(ABCD) \parallel (MNPQ)$ nên (CPI) cắt $(MNPQ)$ theo đường thẳng qua P và song song với CI . Gọi J là trung điểm của MN : IJ song song và bằng AM (đường trung bình của hình bình hành $ABNM$), nên song song và bằng CP . Do đó $CIJP$ là hình bình hành, $PJ \parallel CI$. Vậy giao tuyến cần tìm là PJ . Đáp án: Đường thẳng PJ , với J là trung điểm của MN

- b) Thiết diện là tứ giác $CIJP$ (CI trên đáy dưới, IJ trên mặt $ABNM$, JP trên đáy trên, PC là cạnh bên). Theo câu a, $CI \parallel PJ$ và $IJ \parallel CP$: hai cặp cạnh đối song song.
 Đáp án: **Hình bình hành $CIJP$**

Bài 4.

- a) Mặt phẳng (ABC) cắt hai mặt phẳng song song (α) và (BCD) theo hai giao tuyến MN và BC , nên $MN \parallel BC$. Đáp án: **$MN \parallel BC$**
- b) Tương tự câu a: $NP \parallel CD$, $PM \parallel DB$. Theo định lí Thalès trong các tam giác ABC , ACD , ADB : $\frac{MN}{BC} = \frac{NP}{CD} = \frac{PM}{DB} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$. Chu vi tam giác MNP bằng $\frac{1}{3} \cdot 27 = 9$ cm.
 Đáp án: **9 cm**

DẠNG 3. Định lí Thalès trong không gian

Cách làm. Ba mặt phẳng song song cắt cát tuyến thứ nhất tại A, B, C và cát tuyến thứ hai tại D, E, F thì $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$. Chỉ so các đoạn nằm trên hai cát tuyến; tìm giữa không nhất thiết ở chính giữa.

Bài 5.

- a) $\frac{DE}{DF} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$ nên $DE = \frac{2}{7} \cdot 21 = 6$ và $EF = 21 - 6 = 15$. Đáp án: **$DE = 6, EF = 15$**
- b) $BC = 12 - 5 = 7$. $\frac{DE}{EF} = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{7}$ nên $DE = \frac{5}{7} \cdot 10,5 = 7,5$. Đáp án: **$BC = 7, DE = 7,5$**

- Bài 6.** Ba mặt sàn là ba mặt phẳng đôi một song song, cây cột và ống nước là hai cát tuyến. Theo định lí Thalès trong không gian: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$, tức $\frac{3,2}{8} = \frac{4}{EF}$, suy ra $EF = \frac{4 \cdot 8}{3,2} = 10$ m. Vậy $DF = 8 + 10 = 18$ m. Đáp án: **$EF = 10$ m, $DF = 18$ m**