

Tính đơn điệu và cực trị của hàm số

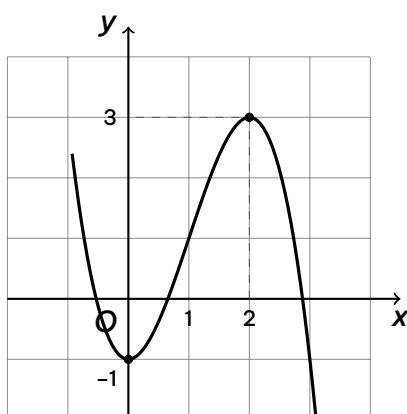
Họ và tên: _____

Ngày: _____

DẠNG 1. Đọc đồ thị · đọc bảng biến thiên

Gợi ý: đi từ trái sang phải, đồ thị đi lên là đồng biến, đi xuống là nghịch biến; đỉnh là cực đại, đáy là cực tiểu.

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình (mỗi ô là 1 đơn vị; đồ thị kéo dài mãi về hai phía).



a) Tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.

.....

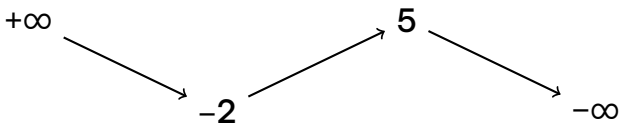
b) Tìm các điểm cực trị và giá trị cực trị của hàm số.

.....

c) Không tính, hãy so sánh $f(0,5)$ và $f(1,5)$.

.....

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$						

a) Tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.

.....

b) Bạn Minh nói "Hàm số đạt cực đại tại $x = 5$ ". Minh nói đúng hay sai? Sửa lại cho đúng và nêu thêm cực tiểu.

.....

DẠNG 2. Xét tính đơn điệu bằng đạo hàm

Gợi ý: tìm tập xác định; tính y' ; tìm x để $y' = 0$ hoặc y' không tồn tại; lập bảng biến thiên; kết luận trên từng khoảng.

Bài 3. Xét tính đơn điệu của các hàm số sau.

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$

.....

b) $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$

.....

.....

.....

.....

Bài 4. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau.

a) $y = \frac{x+3}{x-2}$

.....

.....

.....

.....

b) $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DẠNG 3. Tìm cực trị · bài toán thực tế

Gợi ý: lập bảng biến thiên; y' đổi dấu từ + sang – là cực đại, từ – sang + là cực tiểu, không đổi dấu thì không có cực trị.

Bài 5. Tìm cực trị của các hàm số sau.

a) $y = x^4 - 2x^2 - 3$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b) $y = x + \frac{9}{x}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

c) $y = \frac{x-1}{x+3}$

.....

.....

.....

Bài 6. Một xe điện chạy với tốc độ không đổi v km/h ($0 < v < 60$) thì điện năng tiêu thụ cho mỗi ki-lô-mét là $E(v) = \frac{v}{4} + \frac{100}{v}$ (Wh).

a) Tính $E'(v)$ và tìm v để $E'(v) = 0$.

.....

.....

.....

b) Lập bảng biến thiên của $E(v)$ trên khoảng $(0; 60)$.

.....

.....

.....

.....

.....

c) Xe nên chạy với tốc độ nào để mỗi ki-lô-mét tốn ít điện nhất? Khi đó tốn bao nhiêu?

.....

.....

(Trang này để trống)

Tính đơn điệu và cực trị của hàm số

DẠNG 1. Đọc đồ thị · đọc bảng biến thiên

Cách làm. Đi từ trái sang phải. Đồ thị đi lên (mũi tên lên trong bảng biến thiên) thì hàm số đồng biến; đi xuống thì nghịch biến.

Hàm số đạt cực đại tại x_0 nếu quanh x_0 đồ thị lên rồi xuống (y' đổi dấu từ + sang -); đạt cực tiểu nếu xuống rồi lên (y' đổi dấu từ - sang +). Phân biệt **điểm** cực trị x_0 với **giá trị** cực trị $f(x_0)$.

Bài 1.

- a) Đồ thị đi xuống tới $x = 0$, đi lên tới $x = 2$, rồi lại đi xuống.

Đáp án: **Đồng biến trên $(0; 2)$; nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$**

- b) Đáy tại điểm $(0; -1)$, đỉnh tại điểm $(2; 3)$.

Đáp án: **Cực tiểu tại $x = 0, y_{CT} = -1$; cực đại tại $x = 2, y_{CD} = 3$**

- c) Hàm số đồng biến trên $(0; 2)$ và $0,5 < 1,5$ đều thuộc khoảng này. Đáp án:

$$f(0,5) < f(1,5)$$

Bài 2.

- a) Mũi tên đi lên trên khoảng $(-3; 1)$, đi xuống trên hai khoảng còn lại. Đáp án:

Đồng biến trên $(-3; 1)$; nghịch biến trên $(-\infty; -3)$ và $(1; +\infty)$

- b) Sai, vì 5 là giá trị cực đại chứ không phải điểm cực đại. y' đổi dấu từ + sang - tại $x = 1$, từ - sang + tại $x = -3$.

Đáp án: **Sai. CD tại $x = 1, y_{CD} = 5$; CT tại $x = -3, y_{CT} = -2$**

DẠNG 2. Xét tính đơn điệu bằng đạo hàm

Cách làm. Bước 1: tìm tập xác định. Bước 2: tính y' , tìm các điểm mà $y' = 0$ hoặc y' không tồn tại. Bước 3: lập bảng biến thiên (xét dấu y' trên từng khoảng, có thể thay một số bất kì trong khoảng vào y'). Bước 4: kết luận.

$y' > 0$ trên khoảng nào thì hàm số đồng biến trên khoảng đó; $y' < 0$ thì nghịch biến. Hàm phân thức: kết luận trên **từng khoảng** của tập xác định, không gộp bằng dấu $\cup$.

Bài 3.

- a) Tập xác định $\mathbb{R}$. $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$. Dấu của y' : + trên $(-\infty; -1)$, - trên $(-1; 3)$, + trên $(3; +\infty)$. ($y(-1) = 9, y(3) = -23$.) Đáp

án: **Đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$; nghịch biến trên $(-1; 3)$**

b) Tập xác định $\mathbb{R}$. $y' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x - 1)^2 \leq 0$ với mọi x , và $y' = 0$ chỉ tại $x = 1$.

Đáp án: **Nghịch biến trên $\mathbb{R}$**

Bài 4.

a) Tập xác định: $x \neq 2$. $y' = \frac{(x-2)-(x+3)}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2} < 0$ với mọi $x \neq 2$. Đáp án:

Nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$

b) Tập xác định: $x \neq -1$. $y' = \frac{(2x+2)(x+1)-(x^2+2x+2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 0$. Dấu của y' : + trên $(-\infty; -2)$, - trên $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$, + trên $(0; +\infty)$.

Đáp án: **Đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$; nghịch biến trên $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$**

DẠNG 3. Tìm cực trị · bài toán thực tế

Cách làm. Lập bảng biến thiên như dạng 2 rồi đọc cực trị: qua x_0 mà y' đổi dấu từ + sang - thì hàm số đạt cực đại tại x_0 ; từ - sang + thì đạt cực tiểu; không đổi dấu thì x_0 không phải điểm cực trị (dù $y'(x_0) = 0$).

Bài toán thực tế: gọi biến, viết hàm số và điều kiện của biến, rồi lập bảng biến thiên trên khoảng đó.

Bài 5.

a) $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 0$ hoặc $x = 1$. Dấu của y' trên bốn khoảng lần lượt: -, +, -, +. $y(\pm 1) = -4$, $y(0) = -3$. Đáp án:

Cực tiểu tại $x = -1$ và $x = 1$, $y_{CT} = -4$; cực đại tại $x = 0$, $y_{CD} = -3$

b) Tập xác định: $x \neq 0$. $y' = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = 3$. Dấu của y' : + trên $(-\infty; -3)$, - trên $(-3; 0)$ và $(0; 3)$, + trên $(3; +\infty)$. $y(-3) = -6$, $y(3) = 6$. (Giá trị cực đại nhỏ hơn giá trị cực tiểu!)

Đáp án: **CD tại $x = -3$, $y_{CD} = -6$; CT tại $x = 3$, $y_{CT} = 6$**

c) Tập xác định: $x \neq -3$. $y' = \frac{(x+3)-(x-1)}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2} > 0$ với mọi $x \neq -3$ nên y' không đổi dấu. Đáp án: **Hàm số không có cực trị**

Bài 6.

a) $E'(v) = \frac{1}{4} - \frac{100}{v^2} = \frac{v^2 - 400}{4v^2}$; $E'(v) = 0 \Leftrightarrow v^2 = 400 \Leftrightarrow v = 20$ (vì $v > 0$). Đáp án: **$v = 20$**

b) Trên $(0; 20)$: $E' < 0$ (thử $v = 10$: $E'(10) = -\frac{3}{4}$), E giảm. Trên $(20; 60)$: $E' > 0$ (thử

$v = 40$: $E'(40) = \frac{3}{16}$, E tăng. $E(20) = 5 + 5 = 10$.

Đáp án: E nghịch biến trên $(0; 20)$, đồng biến trên $(20; 60)$

- c) E' đổi dấu từ $-$ sang $+$ tại $v = 20$ nên E đạt cực tiểu tại đó, cũng là nhỏ nhất trên $(0; 60)$. Đáp án: 20 km/h ; 10 Wh mỗi km