

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

Họ và tên: _____

Ngày: _____

DẠNG 1. Bảng biến thiên · đọc và lập

Gợi ý: tìm số lớn nhất, nhỏ nhất ở dòng cuối của bảng, rồi kiểm tra hàm số có ĐẠT ĐƯỢC số đó không.

Bài 1. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 5]$.

x	-2	1	5
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	4	-3	7

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 5]$.

.....

b) Nếu chỉ xét trên nửa khoảng $[-2; 5)$ thì kết quả thay đổi thế nào?

.....

Bài 2. Hàm số $y = 3 - x$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên mỗi tập sau không? Nếu có thì bằng bao nhiêu?

a) Trên đoạn $[0; 2]$.

.....

b) Trên nửa khoảng $(0; 2]$.

.....

Bài 3. Lập bảng biến thiên rồi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có).

a) $y = x + \frac{25}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b) $y = \frac{3x}{x^2 + 4}$ trên $\mathbb{R}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DẠNG 2. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên một đoạn

Gợi ý: tìm điểm trong đoạn có $y' = 0$ (hoặc y' không tồn tại); tính y tại các điểm đó và tại hai đầu mút; so sánh.

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

a) $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$ trên đoạn $[-4; 3]$.

.....

.....

.....

.....

.....

b) $y = x^4 - 8x^2 + 3$ trên đoạn $[-1; 3]$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

a) $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 3]$.

.....

.....

.....

.....

.....

b) $y = x^2 - 2 \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{e}; e\right]$.

.....

.....

.....

.....

.....

c) $y = x + 2 \cos x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

.....

.....

.....

.....

.....

DẠNG 3. Bài toán thực tế

Gợi ý: gọi ẩn, viết đại lượng cần tìm thành hàm số của ẩn, ghi rõ điều kiện của ẩn, rồi tìm max hoặc min.

Bài 6. An và Bình đi xe đạp trên hai con đường thẳng vuông góc với nhau tại một ngã tư. An xuất phát từ ngã tư, đi về phía bắc với vận tốc 12 km/h. Cùng lúc đó Bình đang ở cách ngã tư 10 km về phía đông và đi về phía ngã tư với vận tốc 16 km/h. Trong lúc Bình chưa tới ngã tư, sau bao lâu hai bạn ở gần nhau nhất, và khi đó cách nhau bao nhiêu kilômét?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 7. Trong một buổi học kéo dài t giờ liên tục ($0 \leq t \leq 4$), số từ vựng Mai nhớ được là $W(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t$ (chục từ). Mai nên học liên tục bao lâu để nhớ được nhiều từ nhất, và nhiều nhất là bao nhiêu từ?

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 8. Sau khi uống một cốc cà phê t giờ ($0 \leq t \leq 8$), lượng caffeine trong máu là $C(t) = 60t e^{-t/2}$ (mg). Sau bao lâu thì lượng caffeine trong máu cao nhất, và cao nhất khoảng bao nhiêu miligam?

.....

.....

.....

.....

.....

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

DẠNG 1. Bảng biến thiên · đọc và lập

Cách làm. $M = \max_D f(x)$ khi $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$ và có $x_0 \in D$ để $f(x_0) = M$ (tương tự với min). Trên khoảng, nửa khoảng: lập bảng biến thiên rồi đọc. Giá trị mà hàm số chỉ "tiến sát tới" (ở đầu mút không lấy, hoặc ở vô cực) thì không phải là giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất.

Bài 1.

- a) Ở dòng cuối, số lớn nhất là 7 (đạt tại $x = 5$), số nhỏ nhất là -3 (đạt tại $x = 1$).

Đáp án: $\max_{[-2;5]} f(x) = f(5) = 7$; $\min_{[-2;5]} f(x) = f(1) = -3$

- b) Giá trị nhỏ nhất vẫn là -3 tại $x = 1$. Khi x tiến tới 5, $f(x)$ tiến sát tới 7 nhưng không bằng 7 vì $x \neq 5$; mọi giá trị nhỏ hơn 7 đều bị vượt qua. Vậy không có giá trị lớn nhất. Đáp án: $\min = -3$; không có giá trị lớn nhất

Bài 2.

- a) Hàm số nghịch biến nên lớn nhất tại $x = 0$, nhỏ nhất tại $x = 2$. Đáp án: $\max = 3$; $\min = 1$

- b) $y(2) = 1$ là nhỏ nhất. Khi x tiến về 0 thì y tiến sát tới 3 nhưng không bằng 3. Đáp án: $\min = 1$; không có giá trị lớn nhất

Bài 3.

- a) $y' = 1 - \frac{25}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 5$ (vì $x > 0$). Trên $(0; 5)$: $y' < 0$; trên $(5; +\infty)$: $y' > 0$. Hàm số đi xuống tới $y(5) = 10$ rồi đi lên; ở hai đầu $y \rightarrow +\infty$. Đáp án: $\min y = 10$; không có max

- b) $y' = \frac{3(4 - x^2)}{(x^2 + 4)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Dấu của y' : $-$, $+$, $-$. $y(-2) = -\frac{3}{4}$, $y(2) = \frac{3}{4}$; khi $x \rightarrow \pm\infty$ thì $y \rightarrow 0$. Đáp án: $\max_{\mathbb{R}} y = y(2) = \frac{3}{4}$; $\min_{\mathbb{R}} y = y(-2) = -\frac{3}{4}$

DẠNG 2. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên một đoạn

Cách làm. Bước 1: tìm các điểm thuộc khoảng $(a; b)$ mà $y' = 0$ hoặc y' không tồn tại (điểm nằm ngoài đoạn thì loại). Bước 2: tính y tại các điểm đó, và $y(a), y(b)$. Bước 3: số lớn nhất là max, số nhỏ nhất là min.

Bài 4.

a) $y' = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x-1)(x+3)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -3$ (đều thuộc đoạn). $y(-4) = 13, y(-3) = 20, y(1) = -12, y(3) = 20$. Giá trị lớn nhất đạt tại cả $x = -3$ và $x = 3$. Đáp án: $\max y = 20; \min y = -12$
[-4;3] [-4;3]

b) $y' = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2)$; trong $(-1; 3)$ có $x = 0$ và $x = 2$ (loại $x = -2$). $y(-1) = -4, y(0) = 3, y(2) = -13, y(3) = 12$. Đáp án: $\max y = y(3) = 12; \min y = y(2) = -13$
[-1;3] [-1;3]

Bài 5.

a) $y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$; trong $(0; 3)$ chỉ có $x = 1$. $y(0) = 3, y(1) = 2, y(3) = 3$.
Đáp án: $\max y = 3$ (tại $x = 0$ và $x = 3$); $\min y = y(1) = 2$
[0;3] [0;3]

b) $y' = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$; trong đoạn chỉ có $x = 1$. $y\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e^2} + 2 \approx 2,14, y(1) = 1, y(e) = e^2 - 2 \approx 5,39$. Đáp án: $\max y = y(e) = e^2 - 2; \min y = y(1) = 1$

c) $y' = 1 - 2\sin x; y' = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$ (trong khoảng đang xét). $y(0) = 2, y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \approx 2,26, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$. Đáp án: $\max y = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}; \min y = \frac{\pi}{2}$

DẠNG 3. Bài toán thực tế

Cách làm. Bước 1: chọn ẩn x và điều kiện của x . Bước 2: viết đại lượng cần lớn nhất (nhỏ nhất) thành hàm số $f(x)$. Bước 3: tìm max hoặc min của $f(x)$ trên tập đó, rồi trả lời đúng câu hỏi của bài.

Bài 6. Sau t giờ ($0 \leq t \leq \frac{5}{8}$): An cách ngã tư $12t$, Bình cách ngã tư $10 - 16t$ (km). Bình phương khoảng cách: $f(t) = (12t)^2 + (10 - 16t)^2 = 400t^2 - 320t + 100$. $f'(t) = 800t - 320$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5}$. $f(0) = 100, f\left(\frac{2}{5}\right) = 36, f\left(\frac{5}{8}\right) = 56,25$. Khoảng cách nhỏ nhất là $\sqrt{36} = 6$.

Đáp án: Sau 0,4 giờ (24 phút); cách nhau 6 km

Bài 7. $W'(t) = -3t^2 + 6t + 9 = -3(t-3)(t+1)$; trong $(0; 4)$ chỉ có $t = 3$. $W(0) = 0, W(3) = 27, W(4) = 20$.

Đáp án: **Học 3 giờ; nhớ nhiều nhất 270 từ**

Bài 8. $C'(t) = 60e^{-t/2} - 30te^{-t/2} = 30(2 - t)e^{-t/2}$; $C'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$. $C(0) = 0$, $C(2) = \frac{120}{e} \approx 44,1$, $C(8) = 480e^{-4} \approx 8,8$.

Đáp án: **Sau 2 giờ; cao nhất $\frac{120}{e} \approx 44,1$ mg**