

Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

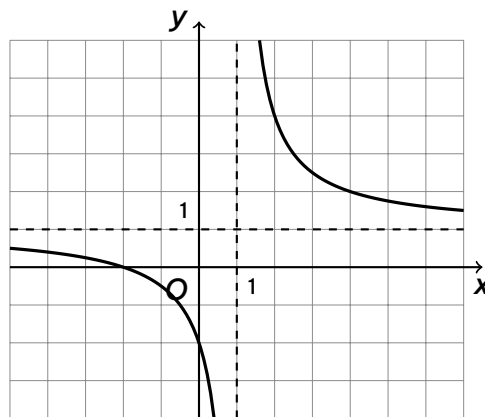
Họ và tên: _____

Ngày: _____

DẠNG 1. Đọc tiệm cận từ đồ thị

Gợi ý: nhánh đồ thị nằm ngang dần về đường nào thì đó là tiệm cận ngang; nhánh dựng đứng lên (hoặc lao xuống) sát đường nào thì đó là tiệm cận đứng; nhánh áp sát một đường thẳng xiên thì đó là tiệm cận xiên.

Bài 1. Hình bên dưới là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ (hai đường nét đứt là $x = 1$ và $y = 1$).



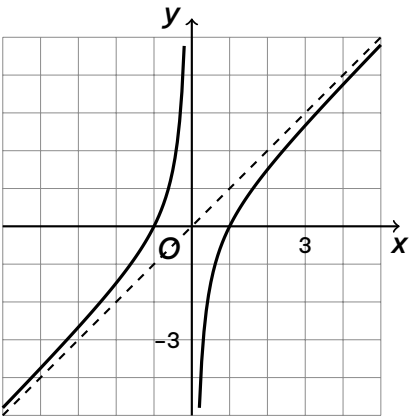
a) Viết kết quả của các giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

.....

b) Chỉ ra các đường tiệm cận của đồ thị.

.....

Bài 2. Hình bên dưới là đồ thị của hàm số $y = g(x)$ (đường nét đứt là đường thẳng $y = x$).



a) Viết kết quả của $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$.

.....

.....

b) Đồ thị có những đường tiệm cận nào? Nó có tiệm cận ngang không?

.....

.....

.....

DẠNG 2. Tìm tiệm cận ngang, tiệm cận đứng

Gợi ý: tính giới hạn tại vô cực để tìm tiệm cận ngang; xét các điểm làm mẫu bằng 0, tính giới hạn một bên để tìm tiệm cận đứng.

Bài 3. Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị mỗi hàm số sau.

a) $y = \frac{4x + 1}{x - 3}$

.....

.....

.....

b) $y = \frac{5 - 2x}{x + 1}$

.....

.....

.....

c) $y = \frac{x+2}{x^2-1}$

.....

.....

.....

.....

Bài 4. Đường thẳng $x = -2$ có phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$ không? Vì sao?

.....

.....

.....

.....

Bài 5. Tìm các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$. (Gợi ý. $\sqrt{x^2} = x$ khi $x > 0$, và $\sqrt{x^2} = -x$ khi $x < 0$.)

.....

.....

.....

.....

.....

DẠNG 3. Tìm tiệm cận xiên

Gợi ý: với phân thức bậc hai trên bậc nhất, chia tử cho mẫu để viết $y = ax + b + \frac{k}{\text{mẫu}}$; khi đó $y = ax + b$ là tiệm cận xiên.

Bài 6. Tìm tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị mỗi hàm số sau.

a) $y = 3x - 2 + \frac{5}{x+1}$

.....

.....

.....

b) $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1}$

.....

.....

.....

.....

c) $y = \frac{2x^2 + x + 3}{2 - x}$

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 7. Cho hàm số $f(x) = \frac{3x^2 + x}{x + 2}$. Tính $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ và $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$, từ đó viết phương trình tiệm cận của đồ thị.

.....

.....

.....

.....

.....

DẠNG 4. Bài toán thực tế

Gợi ý: viết hàm số theo đề bài, tìm tiệm cận, rồi nói ý nghĩa của đường tiệm cận trong tình huống đó.

Bài 8. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự 10 cm. Vật đặt cách thấu kính x cm ($x > 10$) cho ảnh thật cách thấu kính $d(x) = \frac{10x}{x - 10}$ (cm).

a) Tính $d(15)$ và $d(30)$.

.....

.....

b) Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = d(x)$ và nêu ý nghĩa.

.....

.....

.....

c) Tìm tiệm cận ngang của đồ thị và nêu ý nghĩa.

.....

.....

.....

Bài 9. Sau khi uống một viên thuốc t giờ ($t \geq 0$), nồng độ thuốc trong máu được mô hình hoá bởi $C(t) = \frac{5t}{t^2 + 4}$ (mg/l).

a) Tính $C(2)$ và $C(8)$.

.....

.....

b) Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = C(t)$ và nêu ý nghĩa. Đồ thị có tiệm cận đứng không?

.....

.....

.....

.....

(Trang này để trống)

Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

DẠNG 1. Đọc tiệm cận từ đồ thị

Cách làm. Tiệm cận ngang $y = y_0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.

Tiệm cận đứng $x = x_0$: ít nhất một trong các giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ là $+\infty$ hoặc $-\infty$.

Tiệm cận xiên $y = ax + b$ ($a \neq 0$): $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Bài 1.

- a) Ra xa về hai phía, đồ thị sát dần đường $y = 1$. Bên phải $x = 1$ đồ thị vọt lên, bên trái $x = 1$ đồ thị lao xuống. Đáp án: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$

- b) Từ câu trên, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ nên có tiệm cận ngang; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ nên có tiệm cận đứng. Đáp án: **Tiệm cận ngang $y = 1$, tiệm cận đứng $x = 1$**

Bài 2.

- a) Bên phải trục tung đồ thị lao xuống, bên trái trục tung đồ thị vọt lên. Đáp án:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty$$

- b) Tại $x = 0$ hàm số tiến ra vô cực nên trục tung là tiệm cận đứng. Ra xa, đồ thị áp sát đường thẳng $y = x$ nên đó là tiệm cận xiên. Khi $x \rightarrow \pm\infty$ thì $g(x)$ không tiến tới một số nào nên không có tiệm cận ngang.

Đáp án: **Đứng $x = 0$; xiên $y = x$; không có tiệm cận ngang**

DẠNG 2. Tìm tiệm cận ngang, tiệm cận đứng

Cách làm. Bước 1: tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (với phân thức: chia cả tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của x ở mẫu). Ra một số y_0 thì $y = y_0$ là tiệm cận ngang.

Bước 2: tìm x_0 làm mẫu bằng 0. Nếu tại x_0 tử khác 0 thì $f(x) \rightarrow \pm\infty$, nên $x = x_0$ là tiệm cận đứng. Nếu tử cũng bằng 0 thì phải rút gọn rồi mới tính giới hạn.

Bài 3.

- a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x+1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = 4$. Tại $x = 3$ mẫu bằng 0, tử bằng $13 \neq 0$ nên $\lim_{x \rightarrow 3^+} y = +\infty$.

Đáp án: **Tiệm cận ngang $y = 4$, tiệm cận đứng $x = 3$**

b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5-2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{5}{x} - 2}{1 + \frac{1}{x}} = -2$. Tại $x = -1$ mẫu bằng 0, tử bằng $7 \neq 0$ nên $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = +\infty$.

Đáp án: **Tiệm cận ngang $y = -2$, tiệm cận đứng $x = -1$**

c) Bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu nên $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$. Mẫu bằng 0 tại $x = 1$ và $x = -1$; ở đó tử lần lượt bằng 3 và 1, đều khác 0, nên $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty$. Đáp án:

Tiệm cận ngang $y = 0$, hai tiệm cận đứng $x = 1$ và $x = -1$

Bài 4. Tử cũng bằng 0 tại $x = -2$. Với $x \neq -2$ ta có $y = \frac{(x+2)(x+3)}{x+2} = x+3$, nên $\lim_{x \rightarrow -2} y = 1$, không phải vô cực. Đồ thị là đường thẳng $y = x+3$ bỏ đi điểm $(-2; 1)$. Đáp

án: **Không phải tiệm cận đứng**

Bài 5. Khi $x \rightarrow +\infty$: $y = \sqrt{\frac{4x^2+1}{x^2}} = \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow 2$.

Khi $x \rightarrow -\infty$: $x = -\sqrt{x^2}$ nên $y = -\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow -2$.

Hai giới hạn khác nhau nên đồ thị có hai tiệm cận ngang.

Đáp án: **Hai tiệm cận ngang $y = 2$ và $y = -2$**

DẠNG 3. Tìm tiệm cận xiên

Cách làm. Cách 1 (chia đa thức): viết $f(x) = ax + b + \frac{k}{cx+d}$. Vì $\frac{k}{cx+d} \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow \pm\infty$ nên $y = ax + b$ là tiệm cận xiên.

Cách 2 (tổng quát): $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, rồi $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$ (làm tương tự khi $x \rightarrow -\infty$). Nếu $a = 0$ thì đó là tiệm cận ngang.

Bài 6.

a) $y - (3x - 2) = \frac{5}{x+1} \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow \pm\infty$. Tại $x = -1$ thì $\frac{5}{x+1} \rightarrow \pm\infty$. Đáp án:

Tiệm cận xiên $y = 3x - 2$, tiệm cận đứng $x = -1$

b) $x^2 + 2x - 1 = (x-1)(x+3) + 2$ nên $y = x+3 + \frac{2}{x-1}$. Phần $\frac{2}{x-1} \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow \pm\infty$, và tiến ra vô cực khi $x \rightarrow 1$. Đáp án: **Tiệm cận xiên $y = x + 3$, tiệm cận đứng $x = 1$**

c) $2x^2 + x + 3 = (2-x)(-2x-5) + 13$ nên $y = -2x-5 + \frac{13}{2-x}$. Phần $\frac{13}{2-x} \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow \pm\infty$, và tiến ra vô cực khi $x \rightarrow 2$. Đáp án: **Tiệm cận xiên $y = -2x - 5$, tiệm cận đứng $x = 2$**

Bài 7. $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x}{x^2 + 2x} = 3$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2 + x}{x + 2} - 3x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{x + 2} = -5.$$

Đáp án: **Tiệm cận xiên $y = 3x - 5$**

DẠNG 4. Bài toán thực tế

Cách làm. Tiệm cận ngang thường là một mức mà đại lượng tiến sát dần nhưng không đạt tới. Tiệm cận đứng thường là một giá trị "cấm": càng tới gần nó, đại lượng kia càng lớn vô hạn.

Bài 8.

a) $d(15) = \frac{150}{5} = 30$; $d(30) = \frac{300}{20} = 15$. Đáp án: **$d(15) = 30 \text{ cm}$, $d(30) = 15 \text{ cm}$**

b) $\lim_{x \rightarrow 10^+} \frac{10x}{x - 10} = +\infty$ (tử tiến tới 100, mẫu dương và tiến về 0). Ý nghĩa là khi vật tiến sát tiêu điểm (cách thấu kính 10 cm) thì ảnh lùi ra xa vô cùng. Đáp án: **Tiệm cận đứng $x = 10$**

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x}{x - 10} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10}{1 - \frac{10}{x}} = 10$. Ý nghĩa là vật càng ở xa thì ảnh càng tiến sát vị trí cách thấu kính 10 cm (tiêu điểm), nhưng không tới đúng vị trí đó. Đáp án: **Tiệm cận ngang $y = 10$**

Bài 9.

a) $C(2) = \frac{10}{8} = 1,25$; $C(8) = \frac{40}{68} = \frac{10}{17} \approx 0,59$. Đáp án: **$C(2) = 1,25 \text{ mg/l}$; $C(8) \approx 0,59 \text{ mg/l}$**

b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5t}{t^2 + 4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{t}}{1 + \frac{4}{t^2}} = 0$. Ý nghĩa là thời gian càng dài, nồng độ thuốc trong máu càng giảm dần về 0. Mẫu $t^2 + 4$ luôn dương nên không có điểm nào làm mẫu bằng 0. Đáp án: **Tiệm cận ngang $y = 0$; không có tiệm cận đứng**