

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

Họ và tên: _____

Ngày: _____

DẠNG 1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm bậc ba

Gợi ý: đi đúng ba bước (tập xác định, bảng biến thiên, đồ thị); nhớ giới hạn ở vô cực phụ thuộc dấu của a ; đồ thị không có tiệm cận và có một tâm đối xứng.

Bài 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau.

a) $y = 2x^3 - 6x + 1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b) $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 2. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 5$.

a) Tìm các điểm cực trị của đồ thị hàm số.

.....

.....

.....

.....

b) Tìm tâm đối xứng / của đồ thị. Kiểm tra rằng / là trung điểm của đoạn nối hai điểm cực trị.

.....

.....

.....

.....

Bài 3. Bạn Lâm lập bảng biến thiên của hàm số $y = -x^3 + 3x$ và ghi: "khi $x \rightarrow -\infty$ thì $y \rightarrow -\infty$ ". Lâm sai ở đâu? Sửa lại và nêu các khoảng đồng biến, nghịch biến.

.....

.....

.....

.....

.....

DẠNG 2. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm phân thức

Gợi ý: tìm tập xác định, tìm các tiệm cận, lập bảng biến thiên (tại chỗ không xác định kẻ hai gạch đứng), kẻ tiệm cận trước rồi mới vẽ hai nhánh.

Bài 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau.

a) $y = \frac{2x - 4}{x + 2}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b) $y = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

c) $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 5. Bạn Vy kết luận: "Hàm số $y = \frac{3x+1}{x-2}$ có $y' = \frac{-7}{(x-2)^2} < 0$ nên nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$." Kết luận này sai ở đâu? Lấy một cặp giá trị của x để chỉ ra chỗ sai, rồi sửa lại.

.....

.....

.....

.....

DẠNG 3. Bài toán thực tế

Gợi ý: lập hàm số theo đề bài, khảo sát trên miền có nghĩa (thường $x \geq 0$ hoặc $x > 0$), rồi đọc câu trả lời từ bảng biến thiên và tiệm cận.

Bài 6. Đội bóng rổ của bạn An đã ném 30 quả phạt và trúng 12 quả. Giả sử từ giờ An ném trúng liên tiếp x quả nữa.

a) Lập hàm số $f(x)$ biểu thị tỉ lệ ném trúng sau khi ném thêm x quả.

.....

.....

b) Khảo sát sự biến thiên của $f(x)$ với $x \geq 0$. Tỉ lệ ném trúng có khi nào đạt 100% không?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

c) An cần ném trúng liên tiếp ít nhất bao nhiêu quả để tỉ lệ đạt 60%?

.....

.....

.....

Bài 7. Quãng đường từ nhà Bình ra biển dài 60 km. Lúc đi, Bình chạy xe với tốc độ 30 km/h; lúc về chạy với tốc độ x km/h ($x > 0$).

a) Chứng tỏ tốc độ trung bình của cả chuyến đi và về là $v(x) = \frac{60x}{x+30}$ (km/h).

.....

.....

.....

.....

b) Khảo sát sự biến thiên của $v(x)$ với $x > 0$ và tìm tiệm cận ngang của đồ thị.

.....

.....

.....

.....

.....

c) Bình muốn tốc độ trung bình cả chuyến là 60 km/h. Có làm được không, dù lúc về chạy nhanh đến đâu? Vì sao?

.....

.....

.....

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

DẠNG 1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm bậc ba

Cách làm. Bước 1: tập xác định $\mathbb{R}$. Bước 2: tính y' , giải $y' = 0$, xét dấu y' , tìm cực trị, tính giới hạn khi $x \rightarrow \pm\infty$ rồi lập bảng biến thiên. Bước 3: chấm điểm cực trị, giao điểm với hai trục, rồi vẽ đường cong theo các mũi tên. Tâm đối xứng có hoành độ là nghiệm của $y'' = 0$.

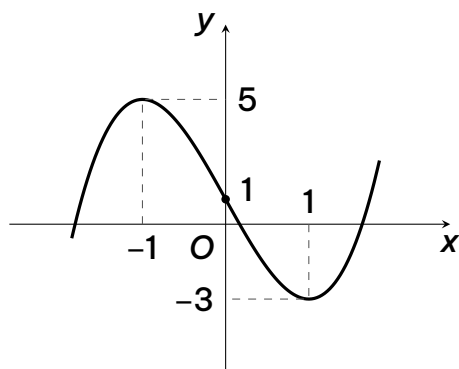
Bài 1.

a) Tập xác định $\mathbb{R}$. $y' = 6x^2 - 6 = 6(x - 1)(x + 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$.

$y' > 0$ trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$: đồng biến. $y' < 0$ trên $(-1; 1)$: nghịch biến.

Cực đại tại $x = -1, y = 5$; cực tiểu tại $x = 1, y = -3$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$.

Đồ thị cắt trục tung tại $(0; 1)$; đây cũng là tâm đối xứng ($y'' = 12x = 0 \Leftrightarrow x = 0$).

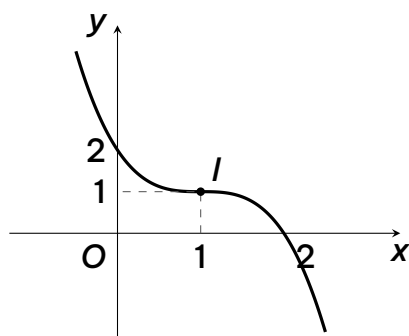


Đáp án: **CĐ $(-1; 5)$, CT $(1; -3)$, tâm đối xứng $(0; 1)$**

b) Tập xác định $\mathbb{R}$. $y' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x - 1)^2 \leq 0$ với mọi x (chỉ bằng 0 tại $x = 1$).

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$, không có cực trị. Vì $a = -1 < 0$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$.

Đồ thị cắt trục tung tại $(0; 2)$, cắt trục hoành tại $(2; 0)$ (vì $y = 1 - (x - 1)^3$). Tâm đối xứng $I(1; 1)$.



Đáp án: **Nghịch biến trên $\mathbb{R}$, không có cực trị, tâm đối xứng $(1; 1)$**

Bài 2.

a) $y' = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 4$. Dấu của y' lần lượt là +, -, +.

$y(0) = 5$, $y(4) = 64 - 96 + 5 = -27$. Đáp án: **Cực đại (0; 5), cực tiểu (4; -27)**

b) $y'' = 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $y(2) = 8 - 24 + 5 = -11$. Vậy $I(2; -11)$.

Trung điểm của hai điểm cực trị: $\left(\frac{0+4}{2}; \frac{5+(-27)}{2}\right) = (2; -11)$, trùng với I . Đáp án: **$I(2; -11)$**

Bài 3. Hệ số $a = -1 < 0$ nên khi $x \rightarrow -\infty$ thì $y \rightarrow +\infty$, khi $x \rightarrow +\infty$ thì $y \rightarrow -\infty$.

$y' = -3x^2 + 3 = -3(x-1)(x+1)$, dấu lần lượt là -, +, -. Nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, đồng biến trên $(-1; 1)$.

Đáp án: **$x \rightarrow -\infty$ thì $y \rightarrow +\infty$**

DẠNG 2. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm phân thức

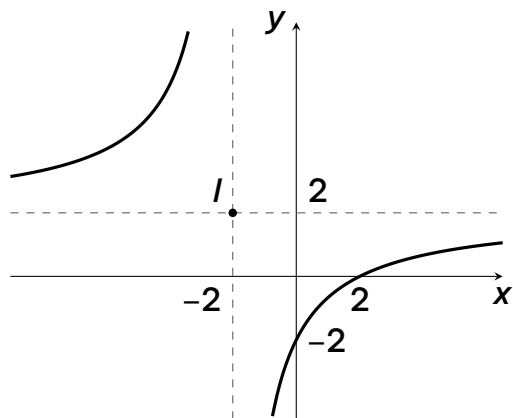
Cách làm. Hàm $y = \frac{ax+b}{cx+d}$: có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang, không có cực trị. Hàm $y = \frac{ax^2+bx+c}{px+q}$: chia tử cho mẫu để thấy tiệm cận xiên; có tiệm cận đứng và tiệm cận xiên. Cả hai loại: giao điểm hai tiệm cận là tâm đối xứng. Kết luận đơn điệu phải nói "trên từng khoảng".

Bài 4.

a) Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. $y' = \frac{8}{(x+2)^2} > 0$: đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$, không có cực trị.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 2$: tiệm cận ngang $y = 2$. $\lim_{x \rightarrow -2^-} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty$: tiệm cận đứng $x = -2$.

Đồ thị cắt trục tung tại $(0; -2)$, cắt trục hoành tại $(2; 0)$. Tâm đối xứng $I(-2; 2)$.



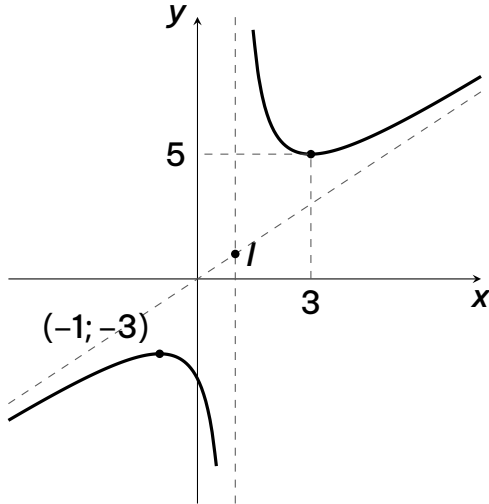
Đáp án: **TCD $x = -2$, TCN $y = 2$, đồng biến trên từng khoảng xác định**

b) Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Chia tử cho mẫu: $y = x + \frac{4}{x-1}$.

$$y' = 1 - \frac{4}{(x-1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 3.$$

Đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$; nghịch biến trên $(-1; 1)$ và $(1; 3)$. Cực đại tại $x = -1, y = -3$; cực tiểu tại $x = 3, y = 5$.

Tiệm cận đứng $x = 1$ ($y \rightarrow -\infty$ khi $x \rightarrow 1^-$, $y \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow 1^+$); tiệm cận xiên $y = x$. Đồ thị cắt trục tung tại $(0; -4)$, không cắt trục hoành. Tâm đối xứng $I(1; 1)$.



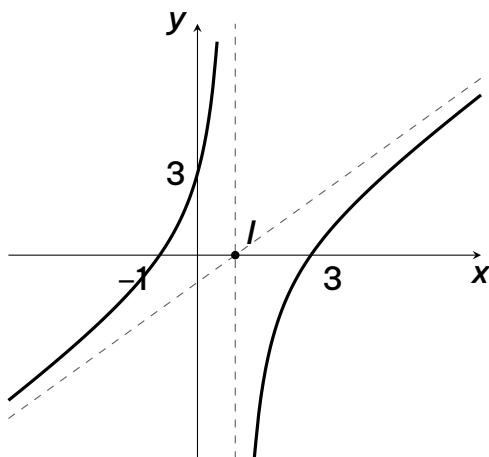
Đáp án: **CD** $(-1; -3)$, **CT** $(3; 5)$, **TCD** $x = 1$, **TCX** $y = x$

c) Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Chia tử cho mẫu: $y = x - 1 - \frac{4}{x-1}$.

$y' = 1 + \frac{4}{(x-1)^2} > 0$: đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$, không có cực trị.

Tiệm cận đứng $x = 1$ ($y \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow 1^-$, $y \rightarrow -\infty$ khi $x \rightarrow 1^+$); tiệm cận xiên $y = x - 1$.

Đồ thị cắt trục tung tại $(0; 3)$, cắt trục hoành tại $(-1; 0)$ và $(3; 0)$. Tâm đối xứng $I(1; 0)$.



Đáp án: **Không có cực trị**, **TCD** $x = 1$, **TCX** $y = x - 1$

Bài 5. Tập xác định bị đứt tại $x = 2$. Chẳng hạn $1 < 3$ nhưng $y(1) = -4 < y(3) = 10$: không phải nghịch biến trên cả $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Phải nói: hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Đáp án: **Nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$**

DẠNG 3. Bài toán thực tế

Cách làm. Bước 1: gọi biến, lập hàm số, ghi rõ miền của biến. Bước 2: tính đạo hàm, xét dấu, tìm giới hạn khi biến tiến ra vô cực. Bước 3: tiệm cận ngang $y = L$ cho biết đại lượng tiến sát L nhưng không chạm tới.

Bài 6.

a) Số quả trứng là $x + 12$, tổng số quả là $x + 30$. Đáp án: **$f(x) = \frac{x+12}{x+30}, x \geq 0$**

b) $f'(x) = \frac{18}{(x+30)^2} > 0$ nên f đồng biến trên $[0; +\infty)$. $f(0) = 0,4$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$: tiệm cận ngang $y = 1$.

Tỉ lệ tăng từ 40%, sát dần 100% nhưng luôn nhỏ hơn 1 (vì $x + 12 < x + 30$). Đáp án: **Luôn tăng, không bao giờ đạt 100%**

c) $\frac{x+12}{x+30} = 0,6 \Leftrightarrow x + 12 = 0,6x + 18 \Leftrightarrow 0,4x = 6 \Leftrightarrow x = 15$. Vì f đồng biến nên từ $x = 15$ trở đi tỉ lệ đạt từ 60%. Đáp án: **15 quả**

Bài 7.

a) Thời gian đi: $60 : 30 = 2$ giờ; thời gian về: $\frac{60}{x}$ giờ. Tổng quãng đường: 120 km.

$v(x) = \frac{120}{2 + \frac{60}{x}} = \frac{120x}{2x + 60} = \frac{60x}{x + 30}$. Đáp án: **$v(x) = \frac{60x}{x + 30}$**

b) $v'(x) = \frac{1800}{(x+30)^2} > 0$ nên v đồng biến trên $(0; +\infty)$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 60$: tiệm cận ngang $y = 60$. Đáp án: **Đồng biến; tiệm cận ngang $y = 60$**

c) Không. $v(x) = 60 - \frac{1800}{x+30} < 60$ với mọi $x > 0$. Lúc đi đã mất 2 giờ, đúng bằng thời gian cần để đi hết 120 km với tốc độ 60 km/h, nên không còn thời gian cho lượt về. Đáp án: **Không, vì $v(x) < 60$ với mọi $x > 0$**