

Ứng dụng đạo hàm để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn

Họ và tên: _____

Ngày: _____

DẠNG 1. Tính tốc độ thay đổi

Gợi ý: tính đạo hàm, thay số, rồi nói rõ ý nghĩa kèm đơn vị. Đạo hàm âm nghĩa là đại lượng đang giảm.

Bài 1. Một cây tre non cao $h(t) = 0,2t^2 + 3t$ (cm) sau t ngày, với $0 \leq t \leq 30$.

a) Tính $h'(t)$ và cho biết $h'(t)$ có ý nghĩa gì.

.....
.....

b) Ngày thứ 10, cây tre đang mọc nhanh cỡ nào?

.....
.....

c) Ngày thứ mấy thì cây mọc với tốc độ 11 cm/ngày?

.....
.....

Bài 2. Một vệt dầu loang trên mặt nước có dạng hình tròn bán kính r (m), diện tích $S = \pi r^2$.

a) Tính tốc độ thay đổi của diện tích theo bán kính khi $r = 5$. Nêu rõ đơn vị.

.....
.....
.....

b) So sánh $S'(5)$ với phần diện tích tăng thêm thật sự khi bán kính tăng từ 5 m lên 6 m.

.....

.....

.....

Bài 3. Khi chơi một trò chơi nặng, phần trăm pin của điện thoại sau t phút là $Q(t) = 100 - 0,5t - 0,01t^2$, với $0 \leq t \leq 60$.

a) Tính $Q'(30)$ và giải thích ý nghĩa của dấu.

.....

.....

.....

b) Lúc nào pin tụt 1,5% mỗi phút?

.....

.....

.....

DẠNG 2. Tối ưu hoá hình học

Gợi ý: gọi ẩn x và ghi điều kiện; viết đại lượng cần lớn nhất (nhỏ nhất) theo x ; dùng đạo hàm.

Bài 4. Một sợi dây thép dài 60 cm được uốn thành khung hình chữ nhật. Uốn thế nào để hình chữ nhật có diện tích lớn nhất?

.....

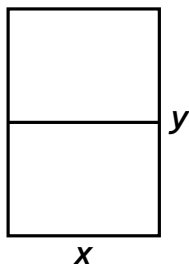
.....

.....

.....

.....

Bài 5. Một khung cửa sổ hình chữ nhật có thêm một thanh ngang ở giữa (như hình). Tổng độ dài nhôm làm khung là 6 m. Tìm kích thước cửa sổ để diện tích lấy sáng lớn nhất.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 6. Bạn làm một tấm thiệp. Phần viết chữ là hình chữ nhật có diện tích 150 cm^2 . Lề trái và lề phải mỗi bên 1 cm; lề trên và lề dưới mỗi bên 1,5 cm. Tìm kích thước tấm thiệp để tốn ít giấy nhất.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DẠNG 3. Bài toán thực tế

Gợi ý: đọc kĩ xem đề hỏi đại lượng nào lớn nhất (nhỏ nhất), lập hàm số cho đúng đại lượng đó rồi mới đạo hàm.

Bài 7. Tại một ngã tư, tính từ 6 giờ sáng, sau t giờ ($0 \leq t \leq 4$) tổng số xe đã đi qua là $X(t) = -20t^3 + 120t^2 + 60t$.

a) Lúc 7 giờ ($t = 1$), mỗi giờ có khoảng bao nhiêu xe đi qua?

.....

.....

.....

b) Lúc nào xe qua ngã tư đông nhất (lưu lượng lớn nhất)? Khi đó lưu lượng là bao nhiêu?

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 8. Một vườn có 40 cây xoài, mỗi cây cho trung bình 60 kg quả mỗi vụ. Người ta ước tính: cứ trồng thêm 1 cây vào vườn thì mỗi cây giảm 1 kg quả (vì thiếu nắng). Nên trồng thêm bao nhiêu cây để tổng sản lượng lớn nhất?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ứng dụng đạo hàm để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn

DẠNG 1. Tính tốc độ thay đổi

Cách làm. Nếu $y = f(x)$ thì $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của y tại $x = a$. Đơn vị của f' là "đơn vị của y trên mỗi đơn vị của x ". $f'(a) > 0$: đang tăng; $f'(a) < 0$: đang giảm.

Bài 1.

- a) $h'(t) = 0,4t + 3$. Đây là tốc độ mọc của cây tre (cm/ngày) tại ngày thứ t . Đáp án: $h'(t) = 0,4t + 3$
- b) $h'(10) = 0,4 \cdot 10 + 3 = 7$. Đáp án: **7 cm/ngày**
- c) $0,4t + 3 = 11 \Leftrightarrow t = 20$. Đáp án: **Ngày thứ 20**

Bài 2.

- a) $S'(r) = 2\pi r$ nên $S'(5) = 10\pi \approx 31,4$. Khi $r = 5$, diện tích đang tăng khoảng $31,4 \text{ m}^2$ trên mỗi mét bán kính. Đáp án: **$10\pi \approx 31,4 \text{ m}^2/\text{m}$**
- b) $S(6) - S(5) = 36\pi - 25\pi = 11\pi \approx 34,6$. Hai số gần nhau nhưng không bằng nhau, vì $S'(5)$ là tốc độ tức thời ngay tại $r = 5$, còn 11π là mức tăng trên cả đoạn từ 5 đến 6. Đáp án: **$11\pi \approx 34,6$, xấp xỉ $S'(5)$**

Bài 3.

- a) $Q'(t) = -0,5 - 0,02t$ nên $Q'(30) = -1,1$. Dấu âm nghĩa là pin đang giảm, lúc này tụt 1,1% mỗi phút. Đáp án: **Pin đang tụt 1,1% mỗi phút**
- b) Pin đang giảm nên $Q'(t) = -1,5$ (không phải $+1,5$). $-0,5 - 0,02t = -1,5 \Leftrightarrow t = 50$. Đáp án: **Phút thứ 50**

DẠNG 2. Tối ưu hoá hình học

Cách làm. Bước 1: xác định đại lượng cần lớn nhất hoặc nhỏ nhất. Bước 2: chọn ẩn x , viết đại lượng đó thành hàm số của x , ghi điều kiện của x . Bước 3: tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) bằng đạo hàm, rồi trả lời đúng câu hỏi của đề.

Bài 4. Gọi x (cm) là một cạnh, $0 < x < 30$; cạnh kia là $30 - x$. $S(x) = x(30 - x) = 30x - x^2$.

$S'(x) = 30 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 15$; S' đổi dấu từ dương sang âm nên S lớn nhất tại $x = 15$: $S = 225 \text{ cm}^2$.

Đáp án: **Hình vuông cạnh 15 cm, diện tích 225 cm²**

Bài 5. Có 3 thanh ngang dài x và 2 thanh dọc dài y (m): $3x + 2y = 6$ nên $y = \frac{6 - 3x}{2}$, với $0 < x < 2$.

$S(x) = xy = 3x - \frac{3}{2}x^2$; $S'(x) = 3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. S' đổi dấu từ dương sang âm nên S lớn nhất tại $x = 1$; khi đó $y = 1,5$ và $S = 1,5 \text{ m}^2$.

Đáp án: **Rộng 1 m, cao 1,5 m, diện tích 1,5 m²**

Bài 6. Gọi x (cm) là chiều rộng phần viết chữ, $x > 0$; chiều cao là $\frac{150}{x}$. Tấm thiệp rộng $x + 2$, cao $\frac{150}{x} + 3$.

$S(x) = (x + 2)\left(\frac{150}{x} + 3\right) = 3x + \frac{300}{x} + 156$; $S'(x) = 3 - \frac{300}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 10$.

Với $0 < x < 10$ thì $S' < 0$, với $x > 10$ thì $S' > 0$ nên S nhỏ nhất tại $x = 10$. Phần chữ 10×15 , tấm thiệp $12 \times 18 = 216 \text{ cm}^2$.

Đáp án: **Tấm thiệp 12 cm $\times$ 18 cm (216 cm²)**

DẠNG 3. Bài toán thực tế

Cách làm. Hỏi "nhanh nhất" tức là hỏi giá trị lớn nhất của tốc độ, nên hàm cần xét là đạo hàm $v = f'$, không phải f . Trên một đoạn: tìm điểm có đạo hàm bằng 0, tính giá trị tại điểm đó và tại hai đầu mút, rồi so sánh.

Bài 7.

a) Lưu lượng xe là $q(t) = X'(t) = -60t^2 + 240t + 60$. $q(1) = -60 + 240 + 60 = 240$.

Đáp án: **240 xe/giờ**

b) Cần giá trị lớn nhất của $q(t)$ trên $[0; 4]$ (không phải của X). $q'(t) = -120t + 240 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

$q(0) = 60$, $q(2) = 300$, $q(4) = 60$. Đáp án: **Lúc 8 giờ, 300 xe/giờ**

Bài 8. Gọi x là số cây trồng thêm, $0 \leq x \leq 60$. Vườn có $40 + x$ cây, mỗi cây cho $60 - x$ kg.

$P(x) = (40 + x)(60 - x) = -x^2 + 20x + 2400$; $P'(x) = -2x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = 10$. P' đổi dấu từ dương sang âm nên P lớn nhất tại $x = 10$: $P = 50 \cdot 50 = 2500 \text{ kg}$ (lúc đầu là 2400 kg).

Đáp án: **Trồng thêm 10 cây, sản lượng 2500 kg**