

Vectơ trong không gian

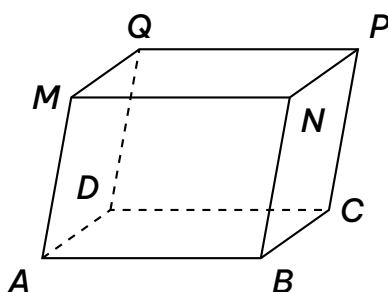
Họ và tên: _____

Ngày: _____

DẠNG 1. Nhận biết vectơ bằng nhau, đối nhau

Gợi ý: hai vectơ bằng nhau khi cùng hướng và cùng độ dài; đối nhau khi ngược hướng và cùng độ dài. Trước hết xem hai giá có song song hoặc trùng nhau không.

Bài 1. Cho hình hộp $ABCD.MNPQ$ như hình bên dưới (các đỉnh M, N, P, Q lần lượt nằm trên A, B, C, D).



a) Kể tên ba vectơ khác $\overrightarrow{AD}$, có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của hình hộp, và bằng $\overrightarrow{AD}$.

.....

b) Tìm vectơ có điểm đầu là P và là vectơ đối của $\overrightarrow{AM}$.

.....

c) Hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{MP}$ có bằng nhau không? Vì sao?

.....

Bài 2. Một cánh cửa sổ là hình chữ nhật trượt ngang trên ray, từ vị trí đóng sang vị trí mở, đi được 60 cm.

- a) Bốn góc của cánh cửa dịch chuyển theo bốn vectơ. Bốn vectơ ấy có bằng nhau không? Vì sao?

.....

.....

.....

- b) Sau đó đóng cửa về đúng vị trí cũ. Vectơ dịch chuyển của mỗi góc lúc đóng liên hệ thế nào với lúc mở? Tổng của hai vectơ ấy là gì?

.....

.....

.....

DẠNG 2. Rút gọn tổng, hiệu các vectơ

Gợi ý: thay mỗi vectơ bằng một vectơ bằng nó để chúng chung gốc hoặc nối đuôi nhau, rồi dùng quy tắc ba điểm, quy tắc hiệu, quy tắc hình hộp.

Bài 3. Cho hình hộp $ABCD.MNPQ$ (hình ở Dạng 1). Rút gọn các biểu thức sau.

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{QP}$

.....

.....

.....

b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BN}$

.....

.....

c) $\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}$

.....

.....

.....

Bài 4. Cho bốn điểm E, F, G, H bất kì trong không gian.

a) Rút gọn $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{FG}$.

.....
.....

b) Chứng minh $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{EH} - \overrightarrow{GH}$.

.....
.....
.....

DẠNG 3. Biểu diễn một vectơ theo ba vectơ cho trước

Gợi ý: đi từ điểm đầu tới điểm cuối dọc theo các cạnh, rồi đổi từng đoạn về ba vectơ đã cho; trung điểm thì nhân với $\frac{1}{2}$.

Bài 5. Cho hình hộp $ABCD.MNPQ$ (hình ở Dạng 1). Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{w}$. Gọi E là trung điểm của MN , F là trung điểm của BC . Biểu diễn các vectơ sau theo $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

a) $\overrightarrow{AE}$

.....
.....

b) $\overrightarrow{AF}$

.....
.....

c) $\overrightarrow{EF}$

.....
.....
.....

Bài 6. Cho hình chóp $S.EFGH$ có đáy $EFGH$ là hình bình hành tâm K .

a) Chứng minh $\overrightarrow{SE} + \overrightarrow{SG} = 2\overrightarrow{SK}$.

.....

.....

.....

b) Biểu diễn $\overrightarrow{SE} + \overrightarrow{SF} + \overrightarrow{SG} + \overrightarrow{SH}$ theo $\overrightarrow{SK}$.

.....

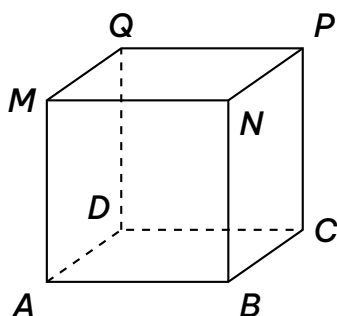
.....

.....

DẠNG 4. Tích tích vô hướng và góc

Gợi ý: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$. Muốn tìm góc giữa hai vectơ thì đưa chúng về chung gốc. Hai vectơ vuông góc thì tích vô hướng bằng 0.

Bài 7. Cho hình lập phương $ABCD.MNPQ$ có cạnh bằng 3 (hình bên dưới).



a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

.....

.....

.....

b) Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AN}$.

.....

.....

.....

.....

c) Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{BP}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 8. Cho tứ diện $D.ABC$ có DA, DB, DC đôi một vuông góc, $DA = DB = 2, DC = 1$.

a) Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

.....

.....

.....

.....

b) Tính cosin của góc ABC .

.....

.....

.....

.....

Bài 9. Trong một trò chơi ba chiều, máy tính tính độ sáng của một mặt phẳng nhỏ bằng tích vô hướng $\vec{n} \cdot \vec{l}$, trong đó $\vec{n}$ là vectơ vuông góc với mặt, $\vec{l}$ là vectơ chỉ về phía nguồn sáng, cả hai có độ dài bằng 1.

a) Góc giữa $\vec{n}$ và $\vec{l}$ là 60° . Tính độ sáng.

.....

.....

b) Mặt sáng nhất khi góc giữa $\vec{n}$ và $\vec{l}$ bằng bao nhiêu? Khi nào độ sáng bằng 0?

.....

.....

.....

c) Độ sáng đo được là $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa $\vec{n}$ và $\vec{l}$.

.....

.....

Bài 10. Một con ong rời tổ, bay 4 m về hướng đông, rồi 4 m về hướng bắc, rồi bay thẳng lên cao 7 m. Coi ba chặng bay là ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đôi một vuông góc. Dùng tích vô hướng, tính khoảng cách từ con ong tới tổ.

.....

.....

.....

.....

.....

Vectơ trong không gian

DẠNG 1. Nhận biết vectơ bằng nhau, đối nhau

Cách làm. Bước 1: xem hai giá có song song hoặc trùng nhau không (không thì hai vectơ không cùng phương, loại ngay).

Bước 2: so hướng và độ dài. Cùng hướng, cùng độ dài: bằng nhau. Ngược hướng, cùng độ dài: đối nhau.

Trong hình hộp, các cạnh song song thì bằng nhau, nên chỉ cần để ý chiều mũi tên.

Bài 1.

- a) Các cạnh BC , MQ , NP song song và dài bằng AD ; chọn chiều mũi tên cùng hướng với $\overrightarrow{AD}$. Đáp án: $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{NP}$
- b) Cạnh qua P song song với AM là PC . Vectơ $\overrightarrow{PC}$ đi xuống, ngược hướng với $\overrightarrow{AM}$, và $PC = AM$. Đáp án: $\overrightarrow{PC}$
- c) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CP}$ nên tứ giác $ACPM$ là hình bình hành. Do đó AC song song và bằng MP , hai vectơ cùng hướng. Đáp án: $\text{Có}, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MP}$

Bài 2.

- a) Cả cánh cửa trượt song song với ray nên bốn vectơ dịch chuyển có giá song song (hoặc trùng nhau), cùng hướng, cùng độ dài 60 cm.
Đáp án: **Bốn vectơ bằng nhau**
- b) Lúc đóng, mỗi góc đi ngược lại đúng quãng đường cũ, nên vectơ lúc đóng ngược hướng và cùng độ dài với vectơ lúc mở.
Đáp án: **Đối nhau; tổng bằng $\vec{0}$**

DẠNG 2. Rút gọn tổng, hiệu các vectơ

Cách làm. Quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Quy tắc hiệu: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.

Quy tắc hình hộp (hình hộp $ABCD.MNPQ$): $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP}$, tức là tổng của ba vectơ nằm trên ba cạnh chung một đỉnh bằng vectơ đường chéo xuất phát từ đỉnh đó.

Bài 3.

- a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AQ}$ (quy tắc hình bình hành trong mặt $ADQM$). Rồi $\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AP}$ (quy tắc ba điểm). Đáp án: $\overrightarrow{AP}$

b) Ba vectơ nằm trên ba cạnh chung đỉnh B . Theo quy tắc hình hộp, tổng là vectơ đường chéo xuất phát từ B . Đáp án: $\overrightarrow{BQ}$

c) $\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MP}$ (quy tắc hiệu). $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ nên $\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NP}$. Đáp án: $\overrightarrow{NP}$ (cũng bằng $\overrightarrow{AD}$)

Bài 4.

a) Đổi chỗ để các vectơ nối đuôi nhau, $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GH}$. Đáp án: $\overrightarrow{EH}$

b) Vế trái $= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EG}$. Vế phải $= \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EG}$. Hai vế cùng bằng $\overrightarrow{EG}$. Đáp án: Hai vế cùng bằng $\overrightarrow{EG}$

DẠNG 3. Biểu diễn một vectơ theo ba vectơ cho trước

Cách làm. Bước 1: viết vectơ cần tìm thành tổng các vectơ nối đuôi nhau dọc theo các cạnh.

Bước 2: thay mỗi vectơ bằng vectơ bằng nó trong ba vectơ đã cho (nếu cạnh thì nhân với $\frac{1}{2}$).

Nếu I là trung điểm của AB thì với mọi điểm O , $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$.

Bài 5.

a) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ME} = \vec{w} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$, mà $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$. Đáp án: $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{w}$

b) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \vec{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, mà $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$. Đáp án: $\overrightarrow{AF} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

c) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u} - \vec{w}$. Đáp án: $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}$

Bài 6.

a) K là trung điểm của EG nên $\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KG} = \vec{0}$. Do đó $\overrightarrow{SE} + \overrightarrow{SG} = (\overrightarrow{SK} + \overrightarrow{KE}) + (\overrightarrow{SK} + \overrightarrow{KG}) = 2\overrightarrow{SK}$.
Đáp án: $\overrightarrow{SE} + \overrightarrow{SG} = 2\overrightarrow{SK}$

b) K cũng là trung điểm của FH nên $\overrightarrow{KF} + \overrightarrow{KH} = 2\overrightarrow{SK}$. Cộng với kết quả câu trên.
Đáp án: $4\overrightarrow{SK}$

DẠNG 4. Tính tích vô hướng và góc

Cách làm. Cách 1 (dùng định nghĩa): đưa hai vectơ về chung gốc, tìm góc, rồi nhân độ dài với cosin của góc.

Cách 2 (tách vectơ): viết mỗi vectơ thành tổng, hiệu của các vectơ đã biết độ dài và góc, nhân phân phối, bỏ các cặp vuông góc. Nhớ $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Tìm góc: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Bài 7.

a) $ABCD$ là hình vuông nên $AC = 3\sqrt{2}$ và góc $BAC = 45^\circ$. Vậy $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 9$.
 Đáp án:

b) AC, AN, CN là ba đường chéo của ba mặt hình vuông nên cùng bằng $3\sqrt{2}$, tam giác ACN đều, góc $CAN = 60^\circ$. Vậy $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AN} = 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 9$. Đáp án:

c) Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{w}$ (đôi một vuông góc, độ dài 3). $\overrightarrow{AN} = \vec{u} + \vec{w}$, $\overrightarrow{BP} = \vec{v} + \vec{w}$ nên $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BP} = \vec{w} \cdot \vec{w} = 9$. Mà $AN = BP = 3\sqrt{2}$ nên cosin của góc bằng $\frac{9}{18} = \frac{1}{2}$.
 Đáp án:

Bài 8.

a) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}$. Nhân ra, các tích $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$ đều bằng 0, chỉ còn $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DB} = 2^2$.
 Đáp án:

b) $BA = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Vậy $\cos \widehat{ABC} = \frac{4}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$.
 Đáp án:

Bài 9.

a) $\vec{n} \cdot \vec{l} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ$. Đáp án:

b) $\vec{n} \cdot \vec{l} = \cos(\vec{n}, \vec{l})$ lớn nhất bằng 1 khi góc bằng 0° (ánh sáng chiếu thẳng vào mặt); bằng 0 khi góc bằng 90° (ánh sáng lướt dọc theo mặt).
 Đáp án:

c) $\cos(\vec{n}, \vec{l}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Đáp án:

Bài 10. Độ dịch chuyển là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Vì ba vectơ đôi một vuông góc nên $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$, do đó $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = 16 + 16 + 49 = 81$.
 Đáp án: