

Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Họ và tên: _____

Ngày: _____

DẠNG 1. Tính tọa độ của vectơ, trung điểm, trọng tâm

Gợi ý: cộng, trừ, nhân với một số đều làm trên từng tọa độ; hai vectơ cùng phương khi vectơ này bằng một số nhân với vectơ kia.

Bài 1. Cho ba vectơ $\vec{u} = (4; -1; 2)$, $\vec{v} = (-2; 3; 5)$ và $\vec{w} = (1; 0; -3)$. Tìm tọa độ của mỗi vectơ sau.

a) $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$

.....

b) $2\vec{u} - 3\vec{v}$

.....

c) Vectơ đối của $\vec{v}$

.....

Bài 2. Tìm p và q để hai vectơ $\vec{a} = (2; p; -6)$ và $\vec{b} = (-1; 4; q)$ cùng phương.

.....

Bài 3. Cho ba điểm $A(5; -2; 1)$, $B(-1; 4; 7)$ và $C(2; 1; -2)$.

a) Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

.....

b) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

.....
.....

c) Tìm tọa độ điểm D đối xứng với C qua I .

.....
.....
.....

DẠNG 2. Tích vô hướng, độ dài, góc

Gợi ý: nhân từng cặp tọa độ rồi cộng lại; tích vô hướng bằng 0 thì hai vectơ vuông góc.

Bài 4. Cho hai vectơ $\vec{a} = (3; -2; 6)$ và $\vec{b} = (2; 2; -1)$.

a) Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

.....
.....

b) Tính độ dài của mỗi vectơ.

.....
.....

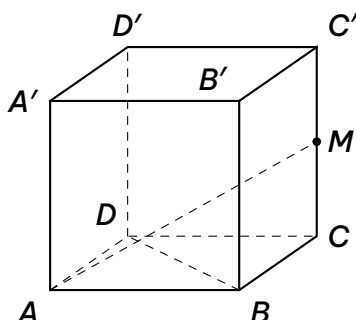
c) Tính góc giữa hai vectơ (làm tròn đến hàng phần mười của độ).

.....
.....
.....

Bài 5. Tìm t để hai vectơ $\vec{u} = (t; t - 1; 2)$ và $\vec{v} = (3; -2; 4)$ vuông góc với nhau.

.....
.....
.....

Bài 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc O trùng A , các điểm B, D, A' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz .



a) Viết toạ độ các điểm B, D, C, C' và M .

.....

.....

.....

b) Chứng minh hai đường thẳng BD và AM vuông góc với nhau.

.....

.....

.....

c) Tính độ dài đoạn thẳng AM .

.....

.....

DẠNG 3. Bài toán thực tế

Gợi ý: đổi mỗi vật thành một điểm có toạ độ, mỗi hướng thành một vectơ, rồi dùng công thức độ dài và góc.

Bài 7. Ở một công trường, người ta chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc O tại chân cần cầu, mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, trục Oz hướng thẳng lên, đơn vị là mét. Móc cầu đang ở điểm $H(12; 5; 24)$, kiện hàng nằm trên mặt đất tại điểm $K(20; -1; 0)$.

a) Móc cầu cách kiện hàng bao nhiêu mét?

.....

.....

b) Móc cầu cần dịch chuyển theo vectơ nào để tới điểm nằm ngay phía trên kiện hàng, ở độ cao 10 m?

.....
.....

c) Tính góc giữa vectơ $\overrightarrow{HK}$ và hướng thẳng đứng đi xuống, tức là vectơ $\vec{d} = (0; 0; -1)$ (làm tròn đến hàng phần mười của độ).

.....
.....
.....

Bài 8. Trên một sân khấu, chọn hệ trục $Oxyz$ có mặt phẳng (Oxy) là mặt sàn, trục Oz hướng thẳng lên, đơn vị là mét. Hai đèn chiếu đặt tại $P(0; 0; 6)$ và $Q(10; 0; 6)$ cùng rọi vào một điểm $S(4; 3; 0)$ trên sàn.

a) Tính khoảng cách từ điểm S tới mỗi đèn. Đèn nào gần hơn?

.....
.....
.....

b) Tính góc giữa hai tia sáng tại S , tức là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SP}$ và $\overrightarrow{SQ}$ (làm tròn đến hàng phần mười của độ).

.....
.....
.....

Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

DẠNG 1. Tính tọa độ của vectơ, trung điểm, trọng tâm

Cách làm. Với $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$: $\vec{a} \pm \vec{b} = (x \pm x'; y \pm y'; z \pm z')$ và $k\vec{a} = (kx; ky; kz)$. Nhân hệ số vào từng vectơ trước, rồi mới cộng trừ. Cần thận khi trừ số âm: $6 - (-2) = 8$. Trung điểm: cộng tọa độ hai đầu mút rồi chia 2. Trọng tâm tam giác: cộng tọa độ ba đỉnh rồi chia 3.

Bài 1.

a) $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = (4 - 2 - 1; -1 + 3 - 0; 2 + 5 + 3)$. Đáp án: $(1; 2; 10)$

b) $2\vec{u} = (8; -2; 4)$ và $3\vec{v} = (-6; 9; 15)$. Trừ từng tọa độ ta được $(8 + 6; -2 - 9; 4 - 15)$.
Đáp án: $(14; -11; -11)$

c) $-\vec{v} = (-1) \cdot \vec{v}$, tức là đổi dấu cả ba tọa độ. Đáp án: $(2; -3; -5)$

Bài 2. Cùng phương nghĩa là $\vec{a} = k\vec{b}$. So tọa độ thứ nhất ta có $2 = k \cdot (-1)$ nên $k = -2$. Khi đó $p = -2 \cdot 4 = -8$ và $-6 = -2q$ nên $q = 3$. Thử lại ta thấy $-2\vec{b} = (2; -8; -6) = \vec{a}$.
Đáp án: $p = -8, q = 3$

Bài 3.

a) $I = \left(\frac{5-1}{2}; \frac{-2+4}{2}; \frac{1+7}{2} \right)$. Đáp án: $I(2; 1; 4)$

b) $G = \left(\frac{5-1+2}{3}; \frac{-2+4+1}{3}; \frac{1+7-2}{3} \right)$. Đáp án: $G(2; 1; 2)$

c) I là trung điểm của CD nên mỗi tọa độ của D bằng hai lần tọa độ của I trừ tọa độ của C . Vậy $D = (2 \cdot 2 - 2; 2 \cdot 1 - 1; 2 \cdot 4 + 2)$. Đáp án: $D(2; 1; 10)$

DẠNG 2. Tích vô hướng, độ dài, góc

Cách làm. $\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' + zz'$; $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Hai vectơ khác $\vec{0}$ vuông góc khi và chỉ khi tích vô hướng bằng 0.

Tính góc tại một đỉnh thì dùng hai vectơ chung gốc là đỉnh đó.

Bài 4.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + 6 \cdot (-1) = 6 - 4 - 6$. Đáp án: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49}$ và $|\vec{b}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9}$. Đáp án: $|\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 3$

c) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-4}{7 \cdot 3} = -\frac{4}{21}$. Cô sin âm nên góc là góc tù. Bấm máy ta được khoảng $100,98^\circ$. Đáp án: **khoảng $101,0^\circ$**

Bài 5. Vuông góc khi tích vô hướng bằng 0. Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3t - 2(t - 1) + 8 = t + 10$. Giải $t + 10 = 0$. Đáp án: **$t = -10$**

Bài 6.

a) B nằm trên tia Ox và $AB = 2$ nên $B(2; 0; 0)$. Tương tự $D(0; 2; 0)$. Từ đó $C(2; 2; 0)$ và $C'(2; 2; 2)$. M là trung điểm của CC' nên cao độ của M bằng 1. Đáp án:

$M(2; 2; 1)$ (các điểm còn lại như trên)

b) $\vec{BD} = (-2; 2; 0)$ và $\vec{AM} = (2; 2; 1)$. Ta có $\vec{BD} \cdot \vec{AM} = -4 + 4 + 0 = 0$. Đáp án:

Tích vô hướng bằng 0 nên $BD \perp AM$

c) $AM = |\vec{AM}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9}$. Đáp án: **$AM = 3$**

DẠNG 3. Bài toán thực tế

Cách làm. Bước 1: đọc kĩ hệ trục (gốc ở đâu, đơn vị gì) và viết toạ độ các điểm.

Bước 2: lấy toạ độ điểm cuối trừ điểm đầu để có vectơ.

Bước 3: khoảng cách là độ dài vectơ; góc tính bằng công thức cô sin.

Bài 7.

a) $\vec{HK} = (20 - 12; -1 - 5; 0 - 24) = (8; -6; -24)$. Vậy $HK = \sqrt{64 + 36 + 576} = \sqrt{676}$.

Đáp án: **26 m**

b) Điểm cần tới là $T(20; -1; 10)$. Vectơ dịch chuyển là $\vec{HT} = (20 - 12; -1 - 5; 10 - 24)$.

Đáp án: **$\vec{HT} = (8; -6; -14)$**

c) $\vec{HK} \cdot \vec{d} = 24$, $|\vec{HK}| = 26$, $|\vec{d}| = 1$. Suy ra $\cos = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$. Đáp án: **khoảng $22,6^\circ$**

Bài 8.

a) $\vec{SP} = (-4; -3; 6)$ nên $SP = \sqrt{16 + 9 + 36} = \sqrt{61} \approx 7,81$. $\vec{SQ} = (6; -3; 6)$ nên $SQ = \sqrt{36 + 9 + 36} = \sqrt{81} = 9$. Đáp án: **$SP \approx 7,81$ m, $SQ = 9$ m; đèn ở P gần hơn**

b) $\vec{SP} \cdot \vec{SQ} = -24 + 9 + 36 = 21$. Suy ra $\cos = \frac{21}{9\sqrt{61}} \approx 0,2988$. Đáp án: **khoảng $72,6^\circ$**