

Phương trình mặt phẳng

Họ và tên: _____

Ngày: _____

DẠNG 1. Lập phương trình mặt phẳng

Gợi ý: cần một điểm thuộc mặt phẳng và một vectơ pháp tuyến. Nếu chỉ có hai vectơ chỉ phương $\vec{u}, \vec{v}$ thì lấy $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}]$.

Bài 1. Viết phương trình mặt phẳng trong mỗi trường hợp sau.

a) Đi qua $T(-1; 2; 5)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; -2; 1)$.

.....

.....

.....

b) Đi qua $G(2; 1; -3)$ và vuông góc với đường thẳng EF , biết $E(1; 0; 2), F(3; 4; 1)$.

.....

.....

.....

.....

Bài 2. Cho ba điểm $D(1; 1; 0), E(2; 0; 3), F(0; 2; 1)$.

a) Chứng minh ba điểm D, E, F không thẳng hàng.

.....

.....

.....

b) Viết phương trình mặt phẳng (DEF) .

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 3. Một đường dốc phẳng cho xe lăn. Chọn hệ trục $Oxyz$ có mặt đất là mặt phẳng (Oxy), đơn vị là mét. Mặt dốc đi qua ba điểm $O(0; 0; 0)$, $P(2; 0; 0)$ và $Q(0; 6; 0,5)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng chứa mặt dốc.

.....

.....

.....

.....

.....

b) Một bánh xe chạm mặt dốc ở độ cao 0,25 m. Lúc đó xe đã đi được bao nhiêu mét theo phương Oy ?

.....

.....

DẠNG 2. Hai mặt phẳng song song, vuông góc

Gợi ý: đọc hai vectơ pháp tuyến. Tích vô hướng bằng 0 thì vuông góc. Cùng phương thì so thêm hệ số tự do để biết song song hay trùng nhau.

Bài 4. Cho $(P) : x - 3y + 2z - 1 = 0$. Xét vị trí của (P) với mỗi mặt phẳng sau (song song, trùng nhau hay vuông góc).

a) $(Q) : -2x + 6y - 4z + 5 = 0$

.....

.....

b) $(R) : 3x - 9y + 6z - 3 = 0$

.....

.....

c) $(S) : 4x + 2y + z + 7 = 0$

.....

.....

Bài 5. Viết phương trình mặt phẳng đi qua $M(2; -1; 3)$ và song song với $(\alpha) : 5x + y - 2z + 4 = 0$.

.....

.....

.....

.....

Bài 6. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1; 0; 2)$, $B(3; 1; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q) : x - y + 2z - 7 = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DẠNG 3. Khoảng cách

Gợi ý: thay toạ độ điểm vào vế trái của phương trình, lấy trị tuyệt đối, rồi chia cho độ dài vectơ pháp tuyến.

Bài 7. Tính các khoảng cách sau.

a) Từ điểm $N(2; -1; 3)$ đến mặt phẳng $(P) : 6x - 2y + 3z - 2 = 0$.

.....

.....

.....

b) Giữa hai mặt phẳng song song $(P) : x + 2y + 2z - 3 = 0$ và $(Q) : 3x + 6y + 6z + 9 = 0$.

.....

.....

.....

.....

Bài 8. Tìm các điểm M trên trục Oy cách mặt phẳng $(P) : 2x - y + 2z - 4 = 0$ một khoảng bằng 2.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 9. Một giàn pin mặt trời phẳng nằm trong mặt phẳng $(P) : 3x + 4z - 12 = 0$ (đơn vị là mét). Một đèn báo gắn trên cột tại điểm $S(4; 2; 5)$. Đèn báo cách mặt giàn pin bao nhiêu mét?

.....

.....

.....

.....

Phương trình mặt phẳng

DẠNG 1. Lập phương trình mặt phẳng

Cách làm. Tích có hướng của $\vec{u} = (a; b; c)$ và $\vec{v} = (a'; b'; c')$ là $[\vec{u}, \vec{v}] = (bc' - b'c; ca' - c'a; ab' - a'b)$.

Mặt phẳng qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$, có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Qua ba điểm D, E, F không thẳng hàng: $\vec{n} = [\vec{DE}, \vec{DF}]$, rồi viết phương trình qua D .

Bài 1.

a) $3(x + 1) - 2(y - 2) + (z - 5) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + z + 2 = 0$. Đáp án: $3x - 2y + z + 2 = 0$

b) Mặt phẳng vuông góc với EF nên nhận $\vec{EF} = (2; 4; -1)$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình là $2(x - 2) + 4(y - 1) - (z + 3) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4y - z - 11 = 0$. Đáp án: $2x + 4y - z - 11 = 0$

Bài 2.

a) $\vec{DE} = (1; -1; 3)$, $\vec{DF} = (-1; 1; 1)$. Vì $\frac{1}{-1} \neq \frac{3}{1}$ nên hai vectơ không cùng phương, do đó ba điểm không thẳng hàng. Đáp án: $\vec{DE}, \vec{DF}$ không cùng phương

b) $[\vec{DE}, \vec{DF}] = ((-1) \cdot 1 - 1 \cdot 3; 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 1; 1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1)) = (-4; -4; 0)$. Chọn $\vec{n} = (1; 1; 0)$ (cùng phương). Mặt phẳng qua D nên $(x - 1) + (y - 1) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$. Thử lại với $E (2 + 0 - 2 = 0)$ và $F (0 + 2 - 2 = 0)$. Đáp án: $x + y - 2 = 0$

Bài 3.

a) $\vec{OP} = (2; 0; 0)$, $\vec{OQ} = (0; 6; 0,5)$. $[\vec{OP}, \vec{OQ}] = (0 \cdot 0,5 - 6 \cdot 0; 0 \cdot 0 - 0,5 \cdot 2; 2 \cdot 6 - 0 \cdot 0) = (0; -1; 12)$. Mặt phẳng qua gốc O nên $-y + 12z = 0$. Đáp án: $y - 12z = 0$

b) Điểm chạm thuộc mặt dốc nên tọa độ thỏa mãn $y - 12z = 0$. Với $z = 0,25$ thì $y = 12 \cdot 0,25 = 3$. Đáp án: 3 m

DẠNG 2. Hai mặt phẳng song song, vuông góc

Cách làm. $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\beta) : A'x + B'y + C'z + D' = 0$.

Vuông góc: $AA' + BB' + CC' = 0$.

Song song: $\vec{n}' = k\vec{n}$ và $D' \neq kD$. Trùng nhau: $\vec{n}' = k\vec{n}$ và $D' = kD$.

Bài 4.

a) $(-2; 6; -4) = -2 \cdot (1; -3; 2)$ nên hai pháp tuyến cùng phương, $k = -2$. Hệ số tự do $5 \neq (-2) \cdot (-1) = 2$. Đáp án: $(P) \parallel (Q)$

b) $(3; -9; 6) = 3 \cdot (1; -3; 2)$ và $-3 = 3 \cdot (-1)$. Cả bốn hệ số cùng tỉ lệ. Đáp án: (P) và (R) trùng nhau

c) $1 \cdot 4 + (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4 - 6 + 2 = 0$. Đáp án: $(P) \perp (S)$

Bài 5. Mặt phẳng cần tìm có dạng $5x + y - 2z + D = 0$ với $D \neq 4$. Thay tọa độ M ta được $10 - 1 - 6 + D = 0$, suy ra $D = -3$ (thỏa mãn $D \neq 4$). Đáp án: $5x + y - 2z - 3 = 0$

Bài 6. (P) chứa AB và vuông góc với (Q) nên nhận $\vec{AB} = (2; 1; -1)$ và $\vec{n}_Q = (1; -1; 2)$ làm cặp vectơ chỉ phương. $\vec{n}_P = [\vec{AB}, \vec{n}_Q] = (1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1); (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2; 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1) = (1; -5; -3)$. Qua A nên $(x - 1) - 5y - 3(z - 2) = 0$. Đáp án: $x - 5y - 3z + 5 = 0$

DẠNG 3. Khoảng cách

Cách làm. $d(M_0, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song: lấy một điểm trên mặt phẳng này rồi tính khoảng cách từ điểm đó tới mặt phẳng kia.

Bài 7.

a) $d = \frac{|6 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 - 2|}{\sqrt{36 + 4 + 9}} = \frac{21}{7} = 3$. Đáp án: 3

b) Điểm $K(3; 0; 0)$ thuộc (P) . $d = \frac{|3 \cdot 3 + 6 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 9|}{\sqrt{9 + 36 + 36}} = \frac{18}{9} = 2$. (Không được lấy $|-3 - 9|$ rồi chia, vì hai phương trình chưa cùng hệ số.) Đáp án: 2

Bài 8. M thuộc Oy nên $M(0; t; 0)$. $d = \frac{|-t - 4|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|t + 4|}{3} = 2$, suy ra $|t + 4| = 6$, tức $t = 2$ hoặc $t = -10$. Đáp án: $M(0; 2; 0)$ hoặc $M(0; -10; 0)$

Bài 9. Vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 0; 4)$ (vắng y nên hệ số bằng 0).

$d = \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 - 12|}{\sqrt{9 + 0 + 16}} = \frac{20}{5} = 4$. Đáp án: 4 m