

Phương trình đường thẳng trong không gian

Họ và tên: _____

Ngày: _____

DẠNG 1. Viết phương trình đường thẳng

Gợi ý: tìm một điểm đường thẳng đi qua và một vectơ chỉ phương, rồi viết phương trình tham số. Chỉ viết phương trình chính tắc khi cả ba toạ độ của vectơ chỉ phương đều khác 0.

Bài 1. Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau.

a) Δ đi qua $M(4; -1; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 2; -5)$.

.....

.....

.....

b) Δ đi qua hai điểm $E(-2; 3; 1)$ và $F(1; -1; 4)$.

.....

.....

.....

.....

c) Δ đi qua $N(0; 5; -3)$ và song song với $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z}{6}$.

.....

.....

.....

.....

Bài 2. Trong không gian Oxyz, làm các câu sau.

- a) Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua $H(5; -2; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q) có phương trình $3y - 4z + 7 = 0$. Đường thẳng này có phương trình chính tắc không?

.....

.....

.....

.....

- b) Cho đường thẳng d có phương trình tham số $x = 2 - t, y = 3 + 4t, z = 5t$. Trong hai điểm $P(0; 11; 10)$ và $Q(3; -1; 5)$, điểm nào thuộc d ?

.....

.....

.....

.....

DẠNG 2. Hai đường thẳng vuông góc, vị trí tương đối

Gợi ý: vuông góc thì tích vô hướng của hai vectơ chỉ phương bằng 0. Xét vị trí thì so hai vectơ chỉ phương trước; cùng phương thì thử một điểm, không cùng phương thì giải hệ theo t và s .

Bài 3. Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; m; -3)$ và $\vec{u}_2 = (m; 4; 6)$. Tìm m để Δ_1 vuông góc với Δ_2 .

.....

.....

.....

Bài 4. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng trong mỗi trường hợp sau. Nếu chúng cắt nhau, tìm toạ độ giao điểm.

- a) $d_1: x = 1 + t, y = 2 - 3t, z = 3 + 2t$ và $d_2: x = 4 - 2s, y = -1 + 6s, z = 5 - 4s$.

.....

.....

.....

.....

b) $d_1: x = 3 + 2t, y = -1 + t, z = 4 - 3t$ và $d_2: x = 3 + s, y = 4 - 2s, z = -7 + 4s$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

c) $d_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}$ và $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DẠNG 3. Bài toán thực tế

Gợi ý: ghi các vị trí thành toạ độ, viết phương trình từng đường thẳng, xét vị trí tương đối rồi nói kết quả ấy có ý nghĩa gì trong tình huống.

Bài 5. Trong một nhà xưởng, chọn hệ trục $Oxyz$ có mặt phẳng (Oxy) là sàn, trục Oz hướng thẳng lên, đơn vị là mét. Một ống nước thẳng đi qua hai điểm $A(0; 2; 3)$ và $B(6; 5; 3)$. Một ống dẫn khí thẳng đi qua hai điểm $C(4; 0; 1)$ và $D(4; 8; 5)$.

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng chứa mỗi ống.

.....

.....

.....

.....

b) Hai ống có đựng nhau không? Nếu có thì đựng ở điểm nào?

.....

.....

.....

.....

.....

c) Hai ống có vuông góc với nhau không?

.....

.....

Bài 6. Trong một trung tâm thương mại, chọn hệ trục $Oxyz$ có mặt phẳng (Oxy) là sàn tầng một, trục Oz hướng thẳng lên, đơn vị là mét. Một thang cuốn thẳng nối điểm $A(2; 1; 0)$ ở tầng một với điểm $B(2; 13; 6)$ ở tầng hai.

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng AB . Đường thẳng này có phương trình chính tắc không?

.....

.....

.....

b) Khi đã lên cao 4 m so với sàn tầng một, người đứng trên thang ở điểm nào?

.....

.....

c) Người ta định treo một biển quảng cáo tại điểm $K(2; 7; 3)$. Điểm K có nằm trên đường đi của thang cuốn không?

.....

.....

.....

Phương trình đường thẳng trong không gian

DẠNG 1. Viết phương trình đường thẳng

Cách làm. Đường thẳng qua $A(x_0; y_0; z_0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$: phương trình tham số là $x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct$.

Nếu a, b, c đều khác 0 thì có phương trình chính tắc $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$.

Qua hai điểm A, B : lấy $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Song song với đường thẳng d : lấy vectơ chỉ phương của d . Vuông góc với mặt phẳng: lấy vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.

Bài 1.

- a) Thay tọa độ điểm và vectơ vào công thức. Phương trình tham số là $x = 4 + 3t, y = -1 + 2t, z = 2 - 5t$. Ba tọa độ của $\vec{u}$ đều khác 0 nên có phương trình chính tắc.

Đáp án: $\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-5}$

- b) $\overrightarrow{EF} = (1 - (-2); -1 - 3; 4 - 1) = (3; -4; 3)$ là một vectơ chỉ phương, đường thẳng đi qua E . Phương trình tham số là $x = -2 + 3t, y = 3 - 4t, z = 1 + 3t$. Đáp án:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-1}{3}$$

- c) d có vectơ chỉ phương $(2; -3; 6)$ (đọc ở mẫu). Vì Δ song song với d nên Δ cũng nhận vectơ này làm vectơ chỉ phương. Phương trình tham số là $x = 2t, y = 5 - 3t, z = -3 + 6t$.

Đáp án: $\frac{x}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+3}{6}$

Bài 2.

- a) Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (0; 3; -4)$. Đường thẳng vuông góc với (Q) nên nhận $\vec{n}$ làm vectơ chỉ phương. Hoành độ của vectơ bằng 0 nên không có phương trình chính tắc. Đáp án: $x = 5, y = -2 + 3t, z = 1 - 4t$

- b) Với P : $2 - t = 0$ cho $t = 2$; khi đó $y = 3 + 8 = 11$ và $z = 10$, đúng cả ba dòng.

Với Q : $2 - t = 3$ cho $t = -1$; khi đó $y = 3 - 4 = -1$ (đúng) nhưng $z = -5 \neq 5$. Đáp án: P thuộc d , Q không thuộc d

DẠNG 2. Hai đường thẳng vuông góc, vị trí tương đối

Cách làm. $\Delta_1 \perp \Delta_2$ khi và chỉ khi $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

Hai vectơ chỉ phương cùng phương: lấy một điểm của đường này thử vào đường kia.

Thuộc thì hai đường trùng nhau, không thuộc thì song song.

Không cùng phương: cho tọa độ của hai đường bằng nhau, giải hệ ba phương trình hai ẩn t, s . Có nghiệm thì cắt nhau (thay t vào để tìm giao điểm), vô nghiệm thì chéo nhau.

Bài 3. $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 2m + 4m - 18 = 6m - 18$. Cho bằng 0 ta được $m = 3$. Đáp án: $m = 3$

Bài 4.

a) $\vec{u}_2 = (-2; 6; -4) = -2\vec{u}_1$ nên hai vectơ chỉ phương cùng phương. Điểm $(1; 2; 3)$ thuộc d_1 ; thử vào d_2 thì $4 - 2s = 1$ cho $s = 1,5$, khi đó $y = -1 + 9 = 8 \neq 2$. Điểm này không thuộc d_2 . Đáp án: d_1 song song với d_2

b) $\vec{u}_1 = (2; 1; -3)$ và $\vec{u}_2 = (1; -2; 4)$ không cùng phương. Giải hệ $3 + 2t = 3 + s, -1 + t = 4 - 2s, 4 - 3t = -7 + 4s$.

Dòng một cho $s = 2t$. Thay vào dòng hai: $-1 + t = 4 - 4t$ nên $t = 1, s = 2$. Dòng ba: $4 - 3 = 1$ và $-7 + 8 = 1$, đúng. Đáp án: d_1 cắt d_2 tại điểm $(5; 0; 1)$

c) Viết dạng tham số: $d_1: x = 2 + 3t, y = -1 + 2t, z = 4 - t; d_2: x = s, y = 3 - 2s, z = -2 + 2s$. Hai vectơ chỉ phương $(3; 2; -1)$ và $(1; -2; 2)$ không cùng phương.

Dòng một cho $s = 2 + 3t$. Thay vào dòng hai: $-1 + 2t = 3 - 4 - 6t$ nên $t = 0, s = 2$.

Dòng ba: $4 - 0 = 4$ nhưng $-2 + 4 = 2$, không bằng nhau. Hệ vô nghiệm. Đáp án:

d_1 và d_2 chéo nhau

DẠNG 3. Bài toán thực tế

Cách làm. Một vật thẳng (đường ống, sợi dây căng, thang cuốn) đi qua hai điểm A, B nằm trên đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{AB}$.

Một điểm nằm trên vật đó khi tọa độ của nó thỏa phương trình đường thẳng: cả ba dòng phải cho cùng một giá trị t .

Bài 5.

a) $\vec{AB} = (6; 3; 0)$, chọn vectơ chỉ phương $(2; 1; 0)$; ống nước có phương trình $x = 2t, y = 2 + t, z = 3$.

$\vec{CD} = (0; 8; 4)$, chọn vectơ chỉ phương $(0; 2; 1)$; ống khí có phương trình $x = 4, y = 2s, z = 1 + s$. Đáp án: $(2t; 2 + t; 3)$ và $(4; 2s; 1 + s)$

b) Hai vectơ chỉ phương không cùng phương. Giải hệ $2t = 4, 2 + t = 2s, 3 = 1 + s$. Dòng một cho $t = 2$, dòng ba cho $s = 2$; dòng hai $2 + 2 = 4 = 2 \cdot 2$, đúng. Hai đường thẳng cắt nhau, nên hai ống đụng nhau; phải dời một trong hai ống. Đáp án:

có, tại điểm $(4; 4; 3)$

c) $(2; 1; 0) \cdot (0; 2; 1) = 0 + 2 + 0 = 2 \neq 0$. Đáp án: **không vuông góc**

Bài 6.

a) $\overrightarrow{AB} = (0; 12; 6)$, chọn vectơ chỉ phương $(0; 2; 1)$. Hoành độ của vectơ bằng 0 nên không có phương trình chính tắc. Đáp án: **$x = 2, y = 1 + 2t, z = t$**

b) $z = t = 4$ nên $y = 1 + 8 = 9$, còn $x = 2$. Đáp án: **điểm $(2; 9; 4)$**

c) $z = t = 3$ thì $y = 1 + 6 = 7$ và $x = 2$, đúng tọa độ của K . Biển sẽ chắn đường đi của thang. Đáp án: **có $(t = 3)$**