BÀI TẬP VỀ NHÀ · Toán 12 · Bài 16

Công thức tính góc trong không gian

Họ và tên: _____ Ngày: _____

DẠNG 1. Góc giữa hai đường thẳng

Gợi ý: đọc hai vectơ chỉ phương, tính tích vô hướng và hai độ dài, lấy giá trị tuyệt đối rồi bấm máy. Góc giữa hai đường thẳng không bao giờ tù.

Bài 1. Tính góc giữa hai đường thẳng (làm tròn tới một chữ số thập phân).

a) Δ_1: $x = 2 + t, y = 1 - t, z = 2t$ và Δ_2: $x = 1 - s, y = 3, z = 2 + s$.

.....

.....

.....

.....

b) Δ: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$ và trục Ox.

.....

.....

.....

Bài 2. Hai đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (1; m; 2)$ và $\vec{u}_2 = (2; -1; m)$. Tìm m để góc giữa chúng bằng 90°.

.....

.....

.....

DẠNG 2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng

Gợi ý: đường – mặt dùng vectơ chỉ phương với vectơ pháp tuyến và ra **sin**; mặt – mặt dùng hai vectơ pháp tuyến và ra **cos**. Luôn lấy giá trị tuyệt đối ở tử số.

Bài 3. Tính góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P).

a) Δ: $x = 1 + 2t, y = -t, z = 3 + 2t$ và (P): $2x + y - 2z + 4 = 0$.

.....

.....

.....

b) Δ: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-4}$ và mặt phẳng (Oxy).

.....

.....

.....

Bài 4. Tính góc giữa hai mặt phẳng.

a) (P): $2x + 2y - z - 3 = 0$ và (Q): $x + 4z + 1 = 0$.

.....

.....

.....

b) (R): $x - z + 2 = 0$ và mặt phẳng (Oyz).

.....

.....

DẠNG 3. Bài toán thực tế

Gợi ý: lấy mặt đất làm mặt phẳng (Oxy), viết toạ độ các điểm, tìm vectơ chỉ phương hoặc pháp tuyến (mặt qua ba điểm: tích có hướng), rồi chọn đúng sin hay cos.

Bài 5. Một cột cờ đứng thẳng, đỉnh ở $T(0;0;8)$ (đơn vị mét, chân cột ở gốc toạ độ). Một sợi dây neo căng thẳng từ T xuống cọc $M(4;3;0)$ trên mặt đất. Dây neo tạo với mặt đất một góc bao nhiêu độ?

.....

.....

.....

.....

Bài 6. Mái của một nhà kính là mặt phẳng đi qua $A(0;0;3)$, $B(6;0;3)$, $C(0;4;5)$ (đơn vị mét). Mặt đất là (Oxy). Tính góc nghiêng của mái so với mặt đất.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 7. Mái một chòi canh có dạng hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy là hình vuông cạnh 6 m, đỉnh cao 4 m. Đặt gốc toạ độ ở tâm đáy, $A(3;-3;0)$, $B(3;3;0)$, $C(-3;3;0)$, $S(0;0;4)$.

a) Tính góc giữa mặt bên (SAB) và mặt đáy.

.....

.....

.....

.....

b) Tính góc giữa hai mặt bên kề nhau (SAB) và (SBC).

.....

.....

.....

.....

.....

(Trang này để trống)

Công thức tính góc trong không gian

DẠNG 1. Góc giữa hai đường thẳng

Cách làm. Δ, Δ' có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$, $\vec{u'} = (a'; b'; c')$:

$$\cos(\Delta, \Delta') = |\cos(\vec{u}, \vec{u'})| = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

Vectơ chỉ phương: hệ số của t (phương trình tham số), hoặc các mẫu số (phương trình chính tắc). Trục Ox, Oy, Oz: $(1;0;0)$, $(0;1;0)$, $(0;0;1)$.

Bài 1.

a) $\vec{u_1} = (1; -1; 2)$, $\vec{u_2} = (-1; 0; 1)$ (dòng $y = 3$ cho hệ số 0). $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = -1 + 0 + 2 = 1$, $|\vec{u_1}| = \sqrt{6}$, $|\vec{u_2}| = \sqrt{2}$. $\cos = \dfrac{1}{\sqrt{12}} \approx 0{,}289$. Đáp án: $\boxed{\approx 73{,}2^\circ}$

b) $\vec{u} = (2; -2; 1)$, $\vec{i} = (1; 0; 0)$. $\cos = \dfrac{|2|}{3 \cdot 1} = \dfrac{2}{3}$. Đáp án: $\boxed{\approx 48{,}2^\circ}$

Bài 2. Góc bằng 90° khi $\cos = 0$, tức $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = 2 - m + 2m = 2 + m = 0$. Đáp án: $\boxed{m = -2}$

DẠNG 2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng

Cách làm.

$$\sin(\Delta, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos((P), (Q)) = |\cos(\vec{n}, \vec{n'})| = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

Mặt phẳng $Ax + By + Cz + D = 0$ có pháp tuyến $(A; B; C)$; thiếu biến nào thì toạ độ đó bằng 0. (Oxy), (Oyz), (Oxz) có pháp tuyến $(0;0;1)$, $(1;0;0)$, $(0;1;0)$.

Bài 3.

a) $\vec{u} = (2; -1; 2)$, $\vec{n} = (2; 1; -2)$. $\sin\varphi = \dfrac{|4 - 1 - 4|}{3 \cdot 3} = \dfrac{1}{9}$. Đáp án: $\boxed{\approx 6{,}4^\circ}$

b) $\vec{u} = (1; 1; -4)$, $|\vec{u}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$; $\vec{k} = (0; 0; 1)$. $\sin\varphi = \dfrac{|-4|}{3\sqrt{2}} \approx 0{,}943$. (Dùng nhầm cos sẽ ra $19{,}5^\circ$.) Đáp án: $\boxed{\approx 70{,}5^\circ}$

Bài 4.

a) $\vec{n} = (2; 2; -1)$, $\vec{n'} = (1; 0; 4)$ ((Q) không có y). $\cos\varphi = \dfrac{|2 + 0 - 4|}{3 \cdot \sqrt{17}} = \dfrac{2}{3\sqrt{17}} \approx 0{,}162$.

Đáp án: $\boxed{\approx 80{,}7^\circ}$

b) $\vec{n} = (1; 0; -1)$, $\vec{i} = (1; 0; 0)$. $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Đáp án: $\boxed{45^\circ}$

DẠNG 3. Bài toán thực tế

Cách làm. Mặt phẳng qua A, B, C có pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ (có thể chia cho một số cho gọn).
Mặt đất (Oxy) có pháp tuyến $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Thanh, dây, cạnh nghiêng so với mặt đất: dùng sin. Mái, mặt nghiêng so với mặt đất: dùng cos.

Bài 5. $\overrightarrow{TM} = (4; 3; -8)$, $|\overrightarrow{TM}| = \sqrt{89}$. Đường – mặt nên dùng sin: $\sin\varphi = \dfrac{|-8|}{\sqrt{89}} \approx 0{,}848$.

Đáp án: $\boxed{\approx 58{,}0^\circ}$

Bài 6. $\overrightarrow{AB} = (6; 0; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0; 4; 2)$, $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0; -12; 24)$, chọn $\vec{n} = (0; -1; 2)$. Mặt – mặt nên dùng cos: $\cos\varphi = \dfrac{|2|}{\sqrt{5} \cdot 1} \approx 0{,}894$.

Đáp án: $\boxed{\approx 26{,}6^\circ}$

Bài 7.

a) $\overrightarrow{SA} = (3; -3; -4)$, $\overrightarrow{SB} = (3; 3; -4)$, $[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}] = (24; 0; 18)$, chọn $\vec{n} = (4; 0; 3)$. $\cos\varphi = \dfrac{3}{5 \cdot 1} = \dfrac{3}{5}$. Đáp án: $\boxed{\approx 53{,}1^\circ}$

b) $\overrightarrow{SC} = (-3; 3; -4)$, $[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = (0; 24; 18)$, chọn $\vec{n'} = (0; 4; 3)$. $\cos\varphi = \dfrac{|0 + 0 + 9|}{5 \cdot 5} = \dfrac{9}{25}$. (Góc "mở" giữa hai mặt mái nhìn từ bên trong là $180^\circ - 68{,}9^\circ = 111{,}1^\circ$; góc giữa hai mặt phẳng luôn lấy góc không tù.) Đáp án: $\boxed{\approx 68{,}9^\circ}$