Phương trình mặt cầu

Họ và tên: _____ Ngày: _____

DẠNG 1. Tìm tâm và bán kính

Gợi ý: dạng gọn thì đổi dấu ra tâm, khai căn vế phải ra bán kính; dạng khai triển thì đưa hệ số của x^2, y^2, z^2 về 1, lấy hệ số của x, y, z chia cho -2, rồi tính R^2 (phải dương).

Bài 1. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu.

a) $(x+2)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2 = 16$

.....

.....

b) $x^2 + y^2 + (z+4)^2 = 20$

.....

.....

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 8z + 1 = 0$

.....

.....

.....

d) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 12y - 3 = 0$

.....

.....

.....

Bài 2. Phương trình nào là phương trình mặt cầu? Nếu là mặt cầu, tìm tâm và bán kính.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 10 = 0$

.....

.....

b) $x^2 + y^2 - z^2 + 2x - 1 = 0$

.....

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4 = 0$

.....

d) $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 5 = 0$

.....

.....

Bài 3. Tìm m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2mz + m + 5 = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

.....

.....

.....

.....

DẠNG 2. Viết phương trình mặt cầu

Gợi ý: chỉ cần tâm và bán kính. Đi qua điểm A thì $R = IA$; đường kính AB thì tâm là trung điểm, $R = \frac{AB}{2}$; tiếp xúc mặt phẳng (P) thì $R = d(I, (P))$.

Bài 4. Viết phương trình mặt cầu (S) trong mỗi trường hợp sau.

a) Tâm $I(3; -1; 2)$, bán kính $R = 4$.

.....

.....

b) Tâm $I(1; 0; -2)$ và đi qua điểm $A(3; 2; -1)$.

.....

.....

.....

c) Đường kính AB với $A(-1;2;3)$, $B(3;0;-1)$.

.....

.....

.....

.....

d) Tâm $I(-1;2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P): $2x - y + 2z + 7 = 0$.

.....

.....

.....

.....

Bài 5. Viết phương trình mặt cầu tâm $I(2;1;-1)$ tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy).

.....

.....

.....

DẠNG 3. Vị trí điểm và bài toán thực tế

Gợi ý: đặt hệ trục, viết toạ độ, nhận ra mặt cầu (những điểm cách đều một điểm); so IM^2 với R^2 để biết điểm ở trong ($<$), trên ($=$) hay ngoài ($>$).

Bài 6. Một chiếc đèn treo tại $I(1;2;3)$ (đơn vị: mét). Ánh sáng đủ để đọc sách trong phạm vi 3 m quanh đèn. Cuốn sách của Minh đặt ở $A(2;4;1)$, cuốn sách của Mai đặt ở $B(3;4;0)$. Cuốn nào đủ sáng để đọc?

.....

.....

.....

.....

Bài 7. Mái vòm của một nhà thi đấu là nửa mặt cầu tâm $O(0; 0; 0)$, bán kính 20 m, đặt trên mặt đất $z = 0$.
a) Viết phương trình mặt cầu chứa mái vòm.
b) Một cây cột thẳng đứng dựng tại điểm $(12; 9; 0)$ trên nền. Cột cao tối đa bao nhiêu mét thì đỉnh cột chưa chạm mái (làm tròn tới 0,1 m)?

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 8. Ba trạm phát đặt ở $A(0; 0; 6)$, $B(4; 0; 6)$, $C(0; 6; 6)$ (đơn vị: km). Một máy thu đo được khoảng cách tới cả ba trạm đều bằng 7 km. Biết máy thu không ở cao hơn các trạm, tìm toạ độ máy thu.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Phương trình mặt cầu

DẠNG 1. Tìm tâm và bán kính

Cách làm.

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \Rightarrow I(a;b;c),\ R.$$

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0 \Rightarrow I(a;b;c),\ R^2=a^2+b^2+c^2-d>0.$$

Phương trình là mặt cầu chỉ khi: hệ số của x^2, y^2, z^2 bằng nhau, không có số hạng xy, yz, zx, và $a^2+b^2+c^2-d>0$.

Bài 1.

a) Đổi dấu các số trong ngoặc; vế phải $16=4^2$. Đáp án: $I(-2;5;1),\ R=4$

b) $x^2=(x-0)^2$, $y^2=(y-0)^2$; $R=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$. Đáp án: $I(0;0;-4),\ R=2\sqrt{5}$

c) $a=3, b=-1, c=4, d=1$. $R^2=9+1+16-1=25$. Đáp án: $I(3;-1;4),\ R=5$

d) Chia cả phương trình cho 3: $x^2+y^2+z^2+2x-4y-1=0$. $a=-1, b=2, c=0, d=-1$. $R^2=1+4+0+1=6$. Đáp án: $I(-1;2;0),\ R=\sqrt{6}$

Bài 2.

a) $a=1, b=0, c=-2, d=10$. $a^2+b^2+c^2-d=1+0+4-10=-5<0$. Đáp án: **Không là mặt cầu**

b) Hệ số của z^2 là -1, khác hệ số của x^2, y^2. Đáp án: **Không là mặt cầu**

c) Có số hạng $2xy$. Đáp án: **Không là mặt cầu**

d) $a=0, b=-2, c=0, d=-5$. $R^2=0+4+0+5=9$. Đáp án: **Là mặt cầu,** $I(0;-2;0),\ R=3$

Bài 3. $a=-2, b=1, c=-m, d=m+5$. Cần $a^2+b^2+c^2-d=4+1+m^2-m-5=m^2-m>0$, tức $m(m-1)>0$.

Đáp án: $m<0$ **hoặc** $m>1$

DẠNG 2. Viết phương trình mặt cầu

Cách làm.

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2, \qquad d(I,(P))=\frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Bài 4.

a) Thay $a=3, b=-1, c=2, R^2=16$. Đáp án: $\boxed{(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=16}$

b) $R^2=IA^2=2^2+2^2+1^2=9$. Đáp án: $\boxed{(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=9}$

c) Tâm là trung điểm $I(1;1;1)$. $AB^2=16+4+16=36$, nên $AB=6$, $R=3$. Đáp án: $\boxed{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9}$

d) $R=\dfrac{|-2-2+2+7|}{3}=\dfrac{5}{3}$. Đáp án: $\boxed{(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=\dfrac{25}{9}}$

Bài 5. Mặt phẳng (Oxy) là $z=0$, khoảng cách từ I tới nó bằng $|z_I|=|-1|=1$, nên $R=1$.
Đáp án: $\boxed{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1}$

DẠNG 3. Vị trí điểm và bài toán thực tế

Cách làm.

$$IM^2=(x_M-a)^2+(y_M-b)^2+(z_M-c)^2 \text{ so với } R^2.$$

Nhiều mặt cầu cùng đi qua một điểm: trừ từng cặp phương trình để triệt tiêu x^2, y^2, z^2, được phương trình bậc nhất.

Bài 6. $IA^2=1+4+4=9=3^2$, nên A nằm đúng trên mặt cầu biên (vừa đủ sáng). $IB^2=4+4+9=17>9$, nên B ở ngoài. Đáp án: $\boxed{\textbf{Minh vừa đủ sáng; Mai không}}$

Bài 7. a) $x^2+y^2+z^2=400$.
b) Đỉnh cột $(12;9;h)$ chạm mái khi $144+81+h^2=400$, tức $h^2=175$, $h=\sqrt{175}\approx 13{,}2$.
Đáp án: $\boxed{\textbf{a)}\ x^2+y^2+z^2=400;\ \textbf{b) khoảng}\ 13{,}2\ \textbf{m}}$

Bài 8. Máy thu $P(x;y;z)$ nằm trên ba mặt cầu: $x^2+y^2+(z-6)^2=49$ (1), $(x-4)^2+y^2+(z-6)^2=49$ (2), $x^2+(y-6)^2+(z-6)^2=49$ (3). (1) – (2): $8x-16=0$, $x=2$. (1) – (3): $12y-36=0$, $y=3$. Thay vào (1): $4+9+(z-6)^2=49$, $(z-6)^2=36$, $z=0$ hoặc $z=12$. Loại $z=12$ (cao hơn trạm).
Đáp án: $\boxed{P(2;3;0)}$